

# 修正 Pöschl-Teller 势的 Schrodinger 方程散射态的精确解<sup>\*</sup>

陈昌远<sup>1)</sup> 孙东升<sup>1)</sup> 孙国耀<sup>2)</sup>

(1) 江苏盐城师范专科学校物理系, 江苏盐城 224002; 2) 中山大学物理学系)

**摘 要** 给出修正 Pöschl-Teller 势 Schrodinger 方程散射态的精确解 (一维和三维 S 波), 获得了与束缚态不同的一些物理结果. 有关散射态的结果均作为特例包含在一般结论之中.

**关键词** 修正 Pöschl-Teller 势, Schrodinger 方程, 散射态, 精确解

**分类号** O 413.1

修正 Pöschl-Teller 势 (以下简称修正 PT 势)

$$V(x) = -\lambda(\lambda+1)\frac{\hbar^2}{2} \operatorname{sech}^2 x, (\lambda > 0) \quad (1)$$

是一种双原子分子模型势的吸引部分. 修正 PT 势 Schrodinger 方程的解, 文献中一般采用超几何函数求极限或 Darboux 变换等方法<sup>[1,2]</sup>求解. 最近, 周光辉<sup>[3,4]</sup>对参数  $\lambda$  取自然数 (无反射势) 这一特殊情况, 通过对自变量作双曲函数变换, 得到了用 associated-Legendre 多项式表示的束缚态的归一化波函数以及散射态精确解波函数. 我们在以前的工作<sup>[5]</sup>中, 获得了普遍的 associated-Legendre 多项式表示的束缚态的归一化波函数 (一维和三维 S 波), 它把文献中有关束缚态的结果均作为特例包含之中. 在此基础上, 进一步研究了修正 PT 势的 K-G 方程和 Dirac 方程的束缚态解<sup>[6,7]</sup>.

在文献 [5] 的基础上, 本文进一步把上述结果应用于散射中. 通过对自变量作双曲函数变换, 使修正 PT 势的 Schrodinger 方程转化为普遍的 associated-Legendre 方程, 然后利用普遍的 associated-Legendre 函数和超几何函数间的关系, 给出精确的散射态波函数 (一维和三维 S 波), 在此基础上, 给出透射系数、反射系数和低能散射的相移表达式. 本文的结果具有普遍性, 文献 [1~4] 是有关散射态的结果均作为特例包含在本文更为一般的结论之中.

## 1 一维修正 PT 势的散射态

在坐标表象中, 一维修正 PT 势的 Schrodinger 方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2 j(x)}{dx^2} - \lambda(\lambda+1)\frac{\hbar^2}{2} \operatorname{sech}^2 x j(x) = E j(x) \quad (2)$$

式中,  $E$  为粒子的能量,  $j(x)$  是相应的波函数. 为了方便, 引入参数  $k = \sqrt{2E/\hbar^2}$ , 对于散

\* 收稿日期: 1998-02-26 陈昌远, 男, 40 岁, 副教授

射态,  $k > 0$ . 于是方程 (2) 化为

$$j''(x) + [k^2 + \lambda(\lambda + 1) \operatorname{sech}^2 x] j(x) = 0 \quad (3)$$

对 (3) 式作变换  $y = \tanh x$ , 则可化为

$$(1-y)^2 \frac{d^2 j}{dy^2} - 2y \frac{dj}{dy} + [\lambda(\lambda + 1) - \frac{(\pm ik)^2}{1-y^2}] j = 0 \quad (4)$$

这是普遍的 associated-Legendre 方程<sup>[8]</sup>, 因而解为复数指标的普遍的 associated-Legendre 函数

$$j_{\lambda k}(x) = CP_{\lambda}^{ik}(\tanh x) + DP_{\lambda}^{-ik}(\tanh x) \quad (5)$$

式中,  $C$  和  $D$  是待定常数, 与边界条件和归一化有关.

因为我们研究的是散射态, 而势函数 (1) 式在  $x \rightarrow \pm\infty$  时严格为 0. 按常规设粒子由左边入射, 则波函数应满足这样的边界条件

$$j_{\lambda k}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \exp(ikx) + R' \exp(-ikx), & x \rightarrow -\infty \\ T' \exp(ikx), & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (6)$$

入射波前面的因子  $1/2\pi$  是因为平面波归一化为  $W$  函数而引入的. 于是反射振幅和透射振幅分别为

$$R = -2\pi R', \quad T = 2\pi T' \quad (7)$$

散射波函数 (5) 在  $x \rightarrow \pm\infty$  时应满足边界条件 (6) 式. 利用普遍的 associated-Legendre 函数和超几何函数的关系<sup>[8]</sup>

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-\mu/2} F \left[ -\nu, \nu+1, 1-\mu, \frac{1-x}{2} \right] \quad (8)$$

(5) 式可改写成

$$j_{\lambda k}(\tanh x) = \frac{C}{\Gamma(1-ik)} \exp(ikx) F \left[ -\lambda, \lambda+1, 1-ik, \frac{1-\tanh x}{2} \right] + \frac{D}{\Gamma(1+ik)} \exp(-ikx) F \left[ -\lambda, \lambda+1, 1+ik, \frac{1-\tanh x}{2} \right] \quad (9)$$

由于  $F(\lambda, \lambda+1, 0) = 1$ , 所以

$$j_{\lambda k}(\tanh x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{C}{\Gamma(1-ik)} \exp(ikx) + \frac{D}{\Gamma(1+ik)} \exp(-ikx) \quad (10)$$

对比 (10) 式和 (6) 式得

$$D = 0, \quad T' = \frac{C}{\Gamma(1-ik)}, \quad T = \frac{2\pi C}{\Gamma(1-ik)} \quad (11)$$

再利用普遍的 associated-Legendre 函数和超几何函数间的另一关系式<sup>[8]</sup>

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(-\mu)} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-\mu/2} F \left[ -\nu, \nu+1, 1-\mu, \frac{1+x}{2} \right] - \frac{\sin \mu\pi}{\pi} \Gamma(-\mu) \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{-\mu/2} F \left[ -\nu, \nu+1, 1-\mu, \frac{1-x}{2} \right]$$

并注意到  $D = 0$ , (5) 式还可改写成

$$j_{\lambda k}(\tanh x) = \frac{C\Gamma(-ik)}{\Gamma(1+\lambda-ik)\Gamma(-\lambda-ik)} \exp(ikx) F \left[ -\lambda, \lambda+1, 1+ik, \frac{1-\tanh x}{2} \right] - \frac{C\Gamma(ik)\sin \lambda\pi}{\pi} \exp(-ikx) F \left[ -\lambda, \lambda+1, 1-ik, \frac{1-\tanh x}{2} \right] \quad (12)$$

于是

$$j_{\lambda k}(\tanh x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{C\Gamma(-ik)}{\Gamma(1+\lambda-ik)\Gamma(-\lambda-ik)} \exp(ikx) - \frac{C\Gamma(ik)\sin\lambda\pi}{\pi} \exp(-ikx) \quad (13)$$

对比 (13) 式和 (6) 式得

$$C = \frac{\Gamma(1+\lambda-ik)\Gamma(-\lambda-ik)}{2\pi\Gamma(-ik)}, R' = -\frac{\sin\lambda\pi\Gamma(ik)\Gamma(1+\lambda-ik)\Gamma(-\lambda-ik)}{\pi\Gamma(-ik)} \quad (14)$$

把 (14) 式代入 (7) 和 (11) 式得

$$R = -\frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(ik)\Gamma(1+\lambda-ik)\Gamma(-\lambda-ik)}{\Gamma(-ik)}, T = \frac{\Gamma(1+\lambda-ik)\Gamma(-\lambda-ik)}{\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)} \quad (15)$$

利用

$$\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{\Gamma(z+1)\sin\pi z}$$

$$R = \frac{\sin\lambda\pi}{\sin(\lambda+ik)\pi} \cdot \frac{\Gamma(ik)}{\Gamma(-ik)} \cdot \frac{\Gamma(1+\lambda-ik)}{\Gamma(1+\lambda+ik)},$$

得

$$T = \frac{\sin(ik\pi)}{\sin(\lambda+ik)\pi} \cdot \frac{\Gamma(1+\lambda-ik)}{\Gamma(1+\lambda+ik)} \cdot \frac{\Gamma(1+ik)}{\Gamma(1-ik)} \quad (16)$$

于是, 反射系数

$$|R|^2 = \frac{\sin^2\lambda\pi}{\sin(\lambda+ik)\pi \cdot \sin(\lambda-ik)\pi} = \frac{\sin^2\lambda\pi}{\sin^2\lambda\pi + \sinh^2 k\lambda\pi} \quad (17)$$

$$|T|^2 = \frac{\sin(ik\pi) \cdot \sin(-ik\pi)}{\sin(\lambda+ik)\pi \cdot \sin(\lambda-ik)\pi} = \frac{\sinh^2 k\lambda\pi}{\sin^2\lambda\pi + \sinh^2 k\lambda\pi}$$

由此可见,  $|R|^2 + |T|^2 = 1$ . 当  $\lambda = n$  时,  $|R|^2 = 0$ ,  $|T|^2 = 1$ . 也就是说无反射, 各种能量的入射粒子全部透射过来. 另一方面, 在  $E = 0$  的极限下 (即  $k \sim 0$ ), 将得到全反射, 即  $|T|^2 = 0$ ,  $|R|^2 = 1$ . 把 (14) 式代入 (8) 式和 (12) 式, 得透射波和反射波的精确解波函数分别为

$$\begin{aligned} j_{\lambda k, \text{透}}(\tanh x) &= \frac{\Gamma(1+\lambda-ik)\Gamma(-\lambda-ik)}{2\pi\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)} \exp(ikx) \cdot \\ &\quad F\left(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, \frac{1-\tanh x}{2}\right) \\ j_{\lambda k, \text{反}}(\tanh x) &= -\frac{\sin\lambda\pi\Gamma(ik)\Gamma(1+\lambda-ik)\Gamma(-\lambda-ik)}{\pi\Gamma(-ik)} \exp(-ikx) \cdot \\ &\quad F\left(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, \frac{1+\tanh x}{2}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

由 (18) 式可知, 透射波和反射波均为调制的平面波. 如表示势场强度的  $\lambda = 0$ , 即入射粒子不受势场的作用, 因而就不存在反射波, 而透射波应完全和入射波相同, 为归一化的  $W$  函数的平面波. (18) 式完全符合这一情况, 这时  $j_{0k, \text{反}} = 0$ . 而  $F(0, U, V, x) = 1$ , 得  $j_{0k, \text{透}} = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(ikx)$ , 这和入射波完全相同.

当  $\lambda = n$  时, 由 (18) 式可知, 反射波为 0. 而超几何函数  $F(-n, n+1, 1-ik, (1-\tanh x)/2)$  退化成为  $(1-\tanh x)/2$  的  $n$  次多项式, 也就是说为  $\tanh x$  的  $n$  次多项式. 因此若在 (18) 式中前面仅保留因子  $1/\sqrt{2\pi} \prod_{s=1}^n (ik-s)$ , 其他均合并到展开系数中, 则 (18) 式可表示为

$$j_{\lambda k, \text{透}}(\tanh x) = 1/\sqrt{2\pi} \prod_{s=1}^n (ik-s) \exp(ikx) \sum_{l=0}^n a_{nl} \tanh^l x \quad (19)$$

这就回到了文献 [4] 给出的无反射势散射态波函数的形式. 也就是说, (18) 式具有普遍性, 包括了无反射势这一特例.

## 2 三维修正 PT 势的散射态

三维修正 PT 势为

$$V(r) = -\lambda(\lambda+1)\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \operatorname{sech}^2 r, \quad (\lambda > 0) \quad (20)$$

于是坐标表象中 Schrodinger 方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) - \lambda(\lambda+1) \frac{\hbar^2}{2m} \operatorname{sech}^2 r \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi) \quad (21)$$

引入参数  $k = \sqrt{2m(E - \frac{\hbar^2}{2m})}$ , 对于散射态,  $k > 0$  令  $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} Y(\theta, \varphi)$ , 以分离出 (21) 式的径向部分得

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left[ k^2 + \lambda(\lambda+1) \operatorname{sech}^2 r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U(r) = 0 \quad (22)$$

(22) 式一般只能近似求解, 但对于 S 波 ( $l=0$ ) 可严格求解. 对 S 波作变量代换  $u = \tanh r$ , 则可得

$$(1-u^2) \frac{d^2 U}{du^2} - 2u \frac{dU}{du} + \left[ \lambda(\lambda+1) - \frac{(\pm ik)^2}{1-u^2} \right] U = 0 \quad (23)$$

(23) 式和 (4) 式相同, 因而其解为

$$U_{\lambda k}(r) = A P_{\lambda}^{ik}(\tanh r) + B P_{\lambda}^{-ik}(\tanh r) \quad (24)$$

式中  $A$  和  $B$  为与边界条件和归一化有关的常数, 而  $P_{\lambda}^{\pm ik}(\tanh r)$  是以  $\tanh r$  为宗量的复数指标的普遍的 associated-Legendre 函数. 利用 (8) 式, (24) 式可改写为

$$U_{\lambda k}(r) = \frac{A}{\Gamma(1-ik)} \exp(ikr) F\left(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, \frac{1-\tanh x}{2}\right) + \frac{B}{\Gamma(1+ik)} \exp(-ikr) F\left(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, \frac{1-\tanh x}{2}\right) \quad (25)$$

上式应满足边界条件  $U_{\lambda k}(0) = 0$ ,

$$\frac{A}{\Gamma(1-ik)} F\left(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, 1/2\right) + \frac{B}{\Gamma(1+ik)} F\left(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, 1/2\right) = 0 \quad (26)$$

利用上式, (25) 式可改写成

$$U_{\lambda k}(r) = \frac{A}{\Gamma(1-ik) F(-\lambda, \lambda+1, 1+ik, 1/2)} \cdot [F(-\lambda, \lambda+1, 1+ik, 1/2) F(-\lambda, \lambda+1, 1+ik, (1-\tanh r)/2) \exp(ikr) - F(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, 1/2) F(-\lambda, \lambda+1, 1+ik, (1-\tanh r)/2) \exp(-ikr)] \quad (27)$$

如果波函数按“ $k/2\pi$  标度”归一化<sup>[2]</sup>, 则归一化常数 (原因见后)

$$A = \Gamma(1-ik) \quad (28)$$

于是散射态径向波函数的精确解为

$$R_{\lambda k}(r) = \frac{1}{F(-\lambda, \lambda+1, 1+ik, 1/2)} \cdot [F(-\lambda, \lambda+1, 1+ik, 1/2) F(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, (1-\tanh r)/2) (\exp(ikr))^{1/r} - F(-\lambda, \lambda+1, 1-ik, 1/2) F(-\lambda, \lambda+1, 1+ik, (1-\tanh r)/2) (\exp(-ikr))^{1/r}] \quad (29)$$

由此可见, 三维问题的散射态波函数为发散球面波和会聚球面波的叠加, 它们都是调制的球面波. (19) 式满足如下的归一化条件<sup>[2]</sup>

$$\int_0^\infty r^2 R_{k'}^*(r) R_k(r) dr = 2\pi W(k' - k) \quad (30)$$

按散射态的物理解释, (29) 式可描述低能量的粒子受中心力场  $-\lambda(\lambda+1)\frac{\hbar^2}{2}\text{sech}^2 r$  的散射过程, 所以可直接从精确解求散射波在  $r \rightarrow \infty$  时的渐近式, 来确定低能 ( $l=0$ ) S 分波的散射相移  $W$ , 并说明 (28) 式取法的理由. 因  $r \rightarrow \infty$  时  $\tanh r \rightarrow 1$ , 而  $F(T, U, V, 0) = 1$ , 故 (29) 式的渐近行为

$$R^k(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{F(-\lambda, \lambda+1, ik, 1/2)} \left[ F(-\lambda, \lambda+1, ik, 1/2) \frac{\exp(ikr)}{r} - F(-\lambda, \lambda+1, -ik, 1/2) \frac{\exp(-ikr)}{r} \right] \quad (31)$$

令  $F(-\lambda, \lambda+1, ik, 1/2)$  的模为 0, 辐角为  $h$ , 即

$$\begin{aligned} F(-\lambda, \lambda+1, ik, 1/2) &= D \exp(ih) \\ F(-\lambda, \lambda+1, -ik, 1/2) &= D \exp(-ih) \end{aligned} \quad (32)$$

把 (32) 式代入 (31) 式得

$$R^k(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2 \exp(i(\pi/2 - h))}{r} \sin(kr + h) \quad (33)$$

即低能散射的相移  $W = h$ . 由于因子  $\exp(i(\pi/2 - h))$  的模是 1, 这对归一化无影响, 因此由文献 [2] 具有这一渐近形式的波函数已按“ $k/\lambda$  标度”归一化了. 这就是我们把归一化常数取为 (28) 的原因. 由文献 [8] 给出的超几何函数的求和公式

$$F(T, 1-T, V, 1/2) = \frac{\Gamma(V/2) \Gamma((1+V)/2)}{\Gamma((V+T)/2) \Gamma((1+V-T)/2)},$$

得

$$F(-\lambda, \lambda+1, ik, 1/2) = \frac{\Gamma((1+ik)/2) \Gamma((2+ik)/2)}{\Gamma((1+ik-\lambda)/2) \Gamma((2+ik+\lambda)/2)} \quad (34)$$

$$h = \arg F(\lambda, \lambda+1, ik, 1/2) =$$

$$\arg \Gamma((1+ik)/2) + \arg \Gamma(1/2 - (1+ik)/2) + \arg \Gamma(1-z) - \arg \Gamma(1/2 - z) \quad (35)$$

式中,  $z = (1+ik+\lambda)/2$  由一般恒等式  $\Gamma(2z) = 1/(2^\pi) \exp(2z \ln 2) \Gamma(z) \Gamma(1/2 - z)$ ,

$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$ , 以及由此而来的辐角关系  $\arg \Gamma(2z) = 2n\pi - \text{Im} z + \arg \Gamma(z) + \arg \Gamma(1/2 - z)$ ,  $\arg \Gamma(z) + \arg \Gamma(1-z) = -\arg \sin \pi z$ , 得到

$$\arg \Gamma(1-z) - \arg \Gamma(1/2 - z) = -\arg \Gamma(1+\lambda+ik) + k \ln 2 - \arg \sin \frac{\pi(1+ik+\lambda)}{2} \quad (36)$$

$$\arg \Gamma((1+ik)/2) + \arg \Gamma(1/2 - (1+ik)/2) = \arg \Gamma(1+ik) - k \ln 2$$

把 (36) 式代入 (35) 式得

$$h = -\arg \Gamma(1+\lambda+ik) + \arg \Gamma(1+ik) - \arg \sin \frac{\pi(1+ik+\lambda)}{2} \quad (37)$$

剩下的 2 个  $\Gamma$  函数的辐角可以用 2 个级数来表示

$$\begin{aligned} \arg \Gamma(1+\lambda+ik) &= k \left\{ -C + \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{k} \tan^{-1} \frac{k}{\lambda+s} \right] \right\}, \\ \arg \Gamma(1+ik) &= k \left\{ -C + \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{k} \tan^{-1} \frac{k}{s} \right] \right\} \end{aligned}$$

两者之差是

$$-\arg \Gamma(1+\lambda+ik) + \arg \Gamma(1+ik) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \tan^{-1} \frac{k}{\lambda+s} - \tan^{-1} \frac{k}{s} \right] \quad (38)$$

把 (38) 式代入 (37) 式, 即得低能散射的相移

$$W_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \tan^{-1} \frac{k}{\lambda+s} - \tan^{-1} \frac{k}{s} \right] - \tan^{-1} \left[ \tan \frac{\pi(1+\lambda)}{2} \tanh \frac{\pi k}{2} \right] \quad (39)$$

注意到文献 [3] 和本文对同一势场强度的关系为  $\lambda'(\lambda' - 1) = \lambda(\lambda + 1)$ , ( $\lambda' \geq 1, \lambda \geq 0$ ), 即  $\lambda' = (\lambda + 1)$ . 因此 (39) 式和文献 [3] 给出的相移表达式完全一致.

对于无反射势,  $\lambda = n$ , 这时 (39) 式右边第一项求和仅含有  $n$  项, 而第二项为  $\pi/2$  ( $\lambda$  为奇数) 或者是 0 ( $\lambda$  为偶数). 得无反射势的相移表达式<sup>[5]</sup>

$$W_0 = (\pi/4) [1 + (-1)^{n+1}] - \sum_{s=1}^n \left[ \tan^{-1} \frac{k}{s} \right] \quad (40)$$

本文通过对修正 PT 势的 Schrödinger 方程做自变量的双曲函数变换, 使其转化为普遍的 associated-Legendre 方程, 再利用普遍的 associated-Legendre 函数和超几何函数间的关系, 给出了精确的一维和三维 S 波的散射态波函数, 从而得到了反射系数、透射系数以及低能散射的相移. 由于无反射是修正 PT 势的参数  $\lambda = n$  时的特例, 所以本文把文献 [2~5] 中有关散射态的结果均作为特例包含之中, 综合本文和文献 [1], 修正 PT 势的 Schrödinger 方程的精确解已全部给出了.

### 参 考 文 献

- 1 朗道著. 量子力学非相对论理论 (上册). 严肃译. 北京: 人民教育出版社, 1980
- 2 福里格著. 实用量子力学. 宋孝同等译. 北京: 人民教育出版社, 1982
- 3 周光辉. 无反射势的 Schrödinger 方程的精确解. 物理学报, 1993, 42: 173~179
- 4 周光辉, 文根旺. 无反射势的 Schrödinger 方程严格解的三维推广. 物理学报, 1993, 42: 345~350
- 5 陈昌远, 胡嗣柱. 修正 Pöschl-Teller 势的 Schrödinger 方程束缚态的精确解. 物理学报, 1995, 44: 9~15
- 6 胡嗣柱, 陈昌远. 修正 Pöschl-Teller 势的 Klein-Gordon 方程的束缚态. 复旦学报 (自然科学版), 1996, 35: 578~582
- 7 陈昌远, 孙国耀. 一维修正 Pöschl-Teller 势的 Dirac 方程束缚态. 中山大学学报 (自然科学版), 1997, 36(1): 34~39
- 8 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社, 1979

## Exact Solutions of Scattering States of the Schrödinger Equation with Modified Pöschl-Teller Potential

Chen Changyuan\* Sun Dongsheng Sun Gouyao

**Abstract** The discussion for the exact solution of bound states of the Schrödinger equation with modified Pöschl-Teller potential is extended to scattering states. Exact solutions of the scattering states of the one-dimensional and three-dimensional S-wave are obtained. Some physical significance is found to be different from that in the bound states. The results of scattering states are shown to be special cases contained in more general conclusions.

**Keywords** modified Pöschl-Teller potential, Schrödinger equation, scattering states, exact solutions

\* Department of Physics, Jiangsu Yancheng Normal College, Yancheng 224002, China