

文章编号: 0529-6579 (1999) 04-0117-03

Cantor 尘和 Sierpinski 地毯^{*}

何伟弘¹, 罗俊¹, 贾保国²

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广州 510275; 2. 中山大学物理系)

摘要: 在分形几何的研究中, 除去一些平凡的情形, 绝大多数分形的 Hausdorff 测度计算问题目前还无法解决. 本文通过证明 Cantor 尘几何相似于一个 Sierpinski 地毯, 利用 Sierpinski 地毯的测度的已知结论, 得到了 Cantor 尘 Hausdorff 测度的准确值.

关键词: Cantor 尘; 几何相似; Sierpinski 地毯

中图分类号: O 189.1 **文献标识码:** A

在分形几何的研究中, Hausdorff 维数的计算非常困难, 而 Hausdorff 测度的计算更是困难. 例如, Cantor 尘的 Hausdorff 维数为 1, 而文 [1] 例 2.6 只能给出其 Hausdorff 测度的上界和下界的估计, 其准确值尚未得出. 从定义来看, Cantor 尘与单位闭正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 内的一个 Sierpinski 地毯 (参考定义 1) 截然不同, 可是两者在计算机屏幕上以点阵方式绘出的分形图很相似. 本文从数学上严格证明 Cantor 尘几何相似于该 Sierpinski 地毯, 把 Cantor 尘的 Hausdorff 测度的计算归结为该 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度的计算; 而文 [2] 圆满地解决了后者的 Hausdorff 测度问题, 从而得到 Cantor 尘的 Hausdorff 测度的准确值.

本文中 Hausdorff 维数和测度等概念参考文 [1] 相关章节, 下面的引理 1 是文 [1] 命题 2.2 的一个推论, 引理 2 是文 [1] 定理 9.1 的一种等价形式.

引理 1 设 $F \subset \mathbf{R}^n$, 若存在映射 $f: F \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和正常数 $c > 0$ 使得任意 $x, y \in F$ 都有 $|f(x) - f(y)| = c |x - y|$, 则对每个 $s > 0$ 均有 $H^s(f(F)) = c^s H^s(F)$.

设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中非空闭子集, $S_1, \dots, S_m$ 是 D 上的压缩映射, 即对 $1 \leq i \leq m$ 存在正常数 $\alpha_i < 1$ 使得映射满足 $|S_i(x) - S_i(y)| \leq \alpha_i |x - y| (\forall x, y \in D)$. 在 $\mathbf{R}^n$ 的非空紧子集簇上的定义一个变换 S 如下, 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中一个非空紧子集, 令 $S(E) = \bigcup_{1 \leq i \leq m} S_i(E)$, 并记 $S^0(E) = E, S^k(E) = S(S^{k-1}(E)), (\forall k \geq 1)$.

引理 2 若 D 和 $S_1, \dots, S_m$ 的假设如上, 则 D 中存在唯一的紧子集 F 满足 $F = \bigcup_{1 \leq i \leq m} S_i(F)$. 进而, 若 D 中非空紧子集 V 满足 $S(V) \subset V$, 则 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(V)$.

在引理 1 中定义的映射 $f: F \rightarrow \mathbf{R}^n$ 称作 F 上的相似映射, c 称作 F 的相似比, 集合 $f(F)$ 称

* 基金项目: 中山大学高等学术研究中心资助项目

收稿日期: 1998-10-21 作者简介: 何伟弘, 男, 1968 年生, 讲师.

作几何相似于集合 F .

设 X 为 $\mathbf{R}^n$ 中非空闭子集, $f: F \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为相似映射. 又设 $1 \leq i \leq m$ 对, 存在正常数 $c_i < 1$ 和映射 $S_i: X \rightarrow X$ 使得 $|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y|, (\forall x, y \in X)$. 定义映射 $T_i: f(X) \rightarrow f(X)$ 如下: 对任意 $y \in f(X)$, 令 $T_i(y) = f \circ S_i \circ f^{-1}(y)$. 由相似映射的定义易知 $|T_i(x) - T_i(y)| \leq c_i |x - y|$. 又由引理 2, X 中存在唯一的非空紧子集 A 使得 $A = \bigcup_{1 \leq i \leq m} S_i(A)$, $f(X)$ 中存在唯一的非空紧子集 B 使得 $B = \bigcup_{1 \leq i \leq m} T_i(B)$. 不难验证下述引理 3.

引理 3 $B = f(A)$.

定义 1 记 D 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上的单位闭正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$. 对 $1 \leq i \leq 4$, 分别定义 $S_i, T_i: D \rightarrow D$, 如图 1.

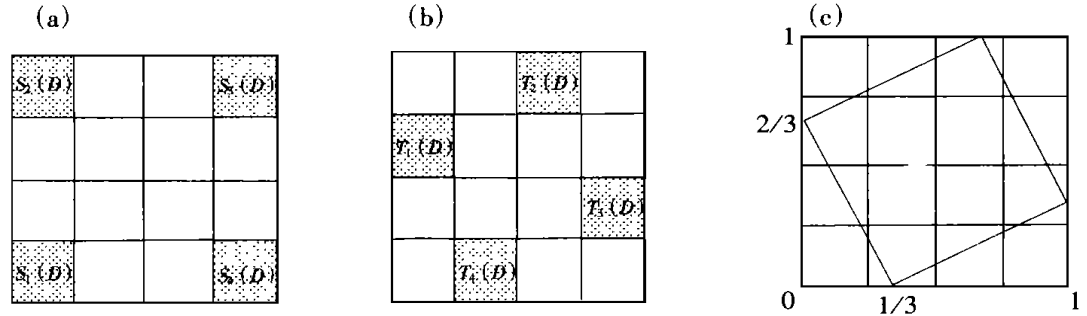


图 1 S_i 的像图(a) 和 T_i 的像图(b)

Fig 1 The images of S_i and T_i

任意 $x = (x_1, x_2) \in D$, 令 $S_1(x) = (x_1/4, x_2/4), S_2(x) = (x_1/4, x_2/4 + 3/4), S_3(x) = (x_1/4 + 3/4, x_2/4 + 3/4), S_4(x) = (x_1/4 + 3/4, x_2/4)$; 令 $T_1(x) = (x_1/4, x_2/4 + 1/2), T_2(x) = (x_1/4 + 1/2, x_2/4 + 3/4), T_3(x) = (x_1/4 + 3/4, x_2/4 + 1/4), T_4(x) = (x_1/4 + 1/4, x_2/4)$. 对 D 中任意非空紧子集 B , 令 $S(B) = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} S_i(B)$ 和 $T(B) = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} T_i(B)$, 则 $\bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(D)$ 和 $\bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(D)$ 分别称作一个 Sierpinski 地毯和 Cantor 尘.

定理 1 Cantor 尘几何相似于 Sierpinski 地毯.

证明 设 W 是单位闭正方形 D 中以 $(0, 2/3), (2/3, 1), (1, 1/3)$ 和 $(1/3, 0)$ 四点为顶点的闭正方形, T_i, T, S_i 和 S 的含义参考定义 1. 映射 $f: D \rightarrow D$ 定义如下: 任意 $x = (x_1, x_2) \in D$, 令 $f(x) = (x_1/3 + 2x_2/3, x_2/3 - 2x_1/3 + 2/3)$. 不难验证, f 是 D 上以 $(5/9)^{1/2}$ 为相似比的相似映射且 $W = f(D)$. 此外, 对 $1 \leq i \leq 4$ 和任意 $y \in W$, 均有 $T_i(y) = f \circ S_i \circ f^{-1}(y) \in W$, 于是由引理 2 和 $T(W) \subset W$, 必有 $\bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(W) = \bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(D)$; 又由引理 3, $f(\bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(D)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(W)$, 即 Cantor 尘几何相似于 Sierpinski 地毯.

根据文献[2] 的结论: Sierpinski 地毯的测度为 $\sqrt{2}$, 有下面的推论.

推论 Cantor 尘 $\bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(D)$ 的 Hausdorff 测度为 $\sqrt{10}/3$.

定义 2 对 $1 \leq i \leq 4, 0 < a \leq 1/3$ 和 $0 \leq b \leq 1 - a$ (或者 $1/3 < a < 1/2$ 和 $0 \leq b \leq 1 - 2a$), 平面 $\mathbf{R}^2$ 上的映射 $S_{a,b,i}$ 定义如下: 任意 $x = (x_1, x_2)$, 令 $S_{a,b,1}(x) = (ax_1, ax_2 + b), S_{a,b,2}(x) = (ax_1 + b, ax_2 + 1 - a), S_{a,b,3}(x) = (ax_1 + 1 - a, ax_2 + 1 - a - b), S_{a,b,4}(x) =$

$= (ax_1 + 1 - a - b, ax_2)$. 记 $K(a, b)$ 为单位闭正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中唯一的非空闭子集满足 $K(a, b) = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} S_{a, b, i}(K(a, b))$, 则 $K(a, b)$ 称作广义 Sierpinski 地毯.

利用类似于定理 1 的证明方法, 可以得到下述定理 2.

定理 2 若 $0 < a \leq 1/3$ 且 $0 \leq u < v \leq 1 - a$ (或者 $1/3 < a < 1/2$ 且 $0 \leq u < v \leq 1 - 2a$), 则广义 Sierpinski 地毯 $K(a, u)$ 几何相似于广义 Sierpinski 地毯 $K(a, v)$.

参考文献:

- [1] FALCONER K. Fractal geometry-mathematical foundations and applications [M]. England: John Wiley & Sons Ltd. 1990.
- [2] 周作领, 吴敏. 一个 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 1998, 37 (6): 118 ~ 120.

The Cantor Dust and a Sierpinski Carpet

HE Wei-hong^{}, LOU Jun, JIA Bao-guo*

Abstract: In the study of fractal theory, the calculations of the Hausdorff measures for most fractals remain unsolved. The Cantor dust is geometrically similar to a Sierpinski carpet, and by known result about the measure of the carpet, the exact value of Hausdorff measure of the cantor dust is obtained.

Keywords: Cantor dust; geometrically similar; Sierpinski carpet

^{*} Department of Scientific Computation and Applications of Computer, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China