

用分形插值函数构造正交多尺度分析^{*}

卢建朱¹⁾ 李岳生²⁾

(1) 暨南大学计算机系, 广州 510632 2) 中山大学科学计算与计算机应用系)

摘 要 提出了一种用多个分形插值函数构造正交多尺度分析的方法, 然后给出了用多个分形插值函数构造 $L^2(\mathbf{R})$ 上的正交多尺度分析的一个充分条件.

关键词 分形插值函数, 正交多尺度分析, 迭代函数系统

分类号 O 174. 41

近 10 年来, 单个尺度函数的多尺度分析已被广泛而深入地研究, 它的许多良好性质已为人们了解. 然而, 单个尺度函数构成的多尺度分析有一定局限性, 如用它不能构造具有对称性的紧支集正交小波. 最近, 文 [1-3] 证明了某类分形插值函数可生成 $L^2(\mathbf{R})$ 上的多尺度分析 (缩写为 MRA). 这类 MRA 具有类似于样条函数^[4]生成的 MRA 的几何特性. 这里用分形插值函数构造的具有紧支集连续的 MRA, 是由多个尺度函数生成, 它不像 Daubechies^[5]所构造的 MRA 仅由一个尺度函数生成.

本文首先用多个分形插值函数构造了一个平移和伸缩不变的函数空间, 这个函数空间是由几个尺度函数和它的整数平移生成的. 然后, 给出了用多个分形插值函数构造 $L^2(\mathbf{R})$ 上的正交多尺度分析的一个充分条件.

1 迭代函数系统与分形插值函数

给定插值点 $\{(x_i, y_i): i = 0, 1, \dots, N\}$, 考虑具有下面特殊结构的仿射变换

$$w_i(x, y) = (u_i(x), v_i(x, y)) \quad (1)$$

其中, $u_i(x) = \alpha x + d_i$, $v_i(x, y) = \lambda_i(x) + sy$, $\lambda_i(x) = ax + bi$. 这里 s 是自由参数, a , b , c 和 d_i 是待定的系数. 如果上述仿射变换在插值点满足条件 $w_i(x_0, y_0) = (x_i, y_i)$, $w_i(x_N, y_N) = (x_{i+1}, y_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, 可得到满足变换 (1) 的 a , b , c 和 d_i .

令 $C(I)$ 表示连续函数的集合 $C(I) = \{f \in C_{[x_0, x_N]}: f(x_0) = y_0, f(x_N) = y_N\}$. 定义映射

$$H: C(I) \rightarrow C(I) \quad (Hf)(x) = \lambda_i(u_i^{-1}(x)) + sf(u_i^{-1}(x)), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

分形插值函数 (简记 FIF)^[6] $f(x)$ 是 H 的唯一不动点, 即 $Hf = f$.

引理 1 设 P_1 是次数不超过一次的多项式集合. 若 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1})$, $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{N-1}) \in \bigotimes_{i=0}^{N-1} P_1$, f 和 g 分别是与 λ 和 $\tilde{\lambda}$ 相关的 FIF, 即 $f(x) = \lambda_i(u_i^{-1}(x)) + sf(u_i^{-1}(x))$,

* 国家教委博士点专项基金 (96055818) 资助项目

收稿日期: 1998-04-03 卢建朱, 男, 30 岁, 博士

$f(x) = \tilde{\lambda}(u^{-1}(x)) + \tilde{s}f(u^{-1}(x))$, 则

$$\langle f(x), \tilde{f}(x) \rangle = \left[\sum_{i=0}^N (\langle \lambda_i(x), \tilde{\lambda}_i(x) \rangle + s \langle f(x), \tilde{\lambda}_i(x) \rangle + \tilde{s} \langle \lambda_i(x), f(x) \rangle) \right] \left[1 - \sum_{i=0}^N s_i \tilde{s}_i \right]$$

其证明类似于文 [2] 公式 (A. 1).

下面的定理给出了元素 $\lambda \in \bigotimes_{i=0}^{N-1} P_i$ 与函数 $f \in I(C)$ 之间的对应.

引理 2^[2] 映射 $\lambda \xrightarrow{\theta} f$ 是从 $\bigotimes_{i=0}^{N-1} P_i$ 到 $\theta \bigotimes_{i=0}^{N-1} P_i$ 的线性同构.

每个 FIF 由给定的插值点 $\{(x_i, y_i): i = 0, 1, \dots, N\}$ 完全确定, 则 $f \in I(C)$, 而且 $\theta \left(\bigotimes_{i=0}^{N-1} P_i \right) \cap C(I) = S$ 是 $N+1$ 维的.

2 由 FIF 生成的正交多尺度分析

这节将利用均匀等距的 FIF 生成的正交多尺度分析.

定义 1 如果一个 MRA 由有限个尺度函数 $\{Q(x)\}_{i=0}^{N-1}$ 生成, 且 $Q(x) \in L^2(\mathbf{R}) (i = 0, 1, \dots, N-1)$ 是连续 (或紧支集) 的, 则称这个 MRA 在 $\mathbf{R}$ 上是连续 (或紧支集) 的. 若 $\langle Q(\cdot), Q(\cdot - l) \rangle = W_{ij} W_{0,0}, i, j = 0, 1, \dots, N-1$, 则 $\{Q(x)\}_{i=0}^{N-1}$ 生成一个正交多尺度分析.

给定 $0 < s < 1$ 和 $N \in \mathbf{Z}, N > 1$, 定义

$\mathcal{N}_0 = \{f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ 对 } \forall j \in \mathbf{Z} \text{ 在 } [j, j+1] \text{ 存在一个分形插值函数 } f(x) \text{ 使得 } f|_{[j, j+1]}\},$ 其中, $x_{j+1} - x_j = 1/N$. $\mathcal{N}_k$ 满足 $f(x) \in \mathcal{N}_k \Leftrightarrow f(N^k x) \in \mathcal{N}_0$.

引理 3^[1] $\mathcal{N}_k \subseteq \mathcal{N}_{k-1}$ 是一列嵌套的线性子空间.

注意 $f \in \mathcal{N}_0$ 是分片连续的, 但在 $x \in \mathbf{Z}$ 这整数点上可能跳跃地不连续. 设 $C_b(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界连续函数空间. 记 $V_0 = \mathcal{N}_0 \cap C_b(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, 对于给定的 $s_0, s_1, \dots, s_{N-1}$, 根据 V_0 和 V_k 的定义从引理 3 得下面引理 4.

引理 4 $V_k \subset V_{k-1}$ 是一列嵌套的线性子空间.

下面将具体地构造由 FIF 组成的集合, 它的整数平移形成 V_0 的一组正交基, 然后通过伸缩和平移生成 $L^2(\mathbf{R})$ 上的正交多尺度分析.

引理 5^[2] 假设 $\{Q(x)\}_{i=0}^{N-1}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 上具有紧支集的有界函数集, 它们满足: ① $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} V_k = \{0\}$; ② 存在向量 $(t_0, t_0, \dots, t_{N-1}) \in \mathbf{R}^N$ 使得 $\sum_{i,l} t_i Q(x-l) = 1$, 对于 $x \in \mathbf{R}$ 几乎处处成立. 则 $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上稠密.

假设 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, y = (y_0, y_1, \dots, y_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$. 令 $f_y: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ 是通过插值点 $\{(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ 的 FIF. 由于 $\mathcal{N}_0$ 中的分形插值函数 $f(x)$ 是 $N+1$ 维空间的元素, 取 $N+1$ 个 FIF 为 $f_{(1, q_1, \dots, q_{N-1}, 0)}(x), f_{(0, p_1, \dots, p_{N-1}, 1)}(x), f_{e_i}(x)$, 其中, $e = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ 是 $\mathbf{R}^{N+1}$ 中的标准基, $i = 1, 2, \dots, N-1$. 显然, 这 $N+1$ 个 FIF 线性无关. 为了使这些 FIF 正交, 选取数列 q_i 和 p_i 满足

$$\langle f_{(1, q_1, \dots, q_{N-1}, 0)}, f_{e_i} \rangle = 0, \langle f_{(0, p_1, \dots, p_{N-1}, 1)}, f_{e_i} \rangle = 0 \quad (2)$$

利用引理 1, 解方程 (2) 可得

$$p_i = p_i(s_0, s_1, \dots, s_{N-1}), q_i = q_i(s_0, s_1, \dots, s_{N-1})$$

其中, $i = 1, 2, \dots, N-1$. 由于分形插值函数 $f_{e_i}(x) (i = 1, 2, \dots, N-1)$ 过插值点 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$, 令 $\bar{f}_{e_i}(x) = f_{e_i}(x), x \in [0, 1]$; $\bar{f}_{e_i}(x) = 0, x \notin [0, 1]$, 故 $f(x)$ 可连续地延拓到 $\mathbf{R}$ 上. 这样 $\bar{f}_{e_i}(x) \in V_0$. 对 $\{\bar{f}_{e_i}(x)\}_{i=1}^{N-1} \subset V_0$ 采用 Gram-Schmidt 正交化方法, 得到 V_0 中的正交函数列 $\{Q(x)\}_{i=1}^{N-1}$.

令 $Q(x) = f_{(0,p_1,\dots,p_{N-1},1)}(x), x \in [0, 1]$; $Q(x) = f_{(1,q_1,\dots,q_{N-1},0)}(x-1), x \in [1, 2]$; $Q(x) = 0, x \notin [0, 2]$. 把 p_i 和 q_i 代入 $\langle Q(x), Q(x-1) \rangle = 0$, 得到 1 个关于 $s_0, s_1, \dots, s_{N-1}$ 的多项式 $g(s_0, s_1, \dots, s_{N-1}) = 0$. 记 $Q(x) = \frac{Q(x)}{\|Q(x)\|_{L^2}}$, 有下列结果.

定理 1 令 $s = \max |s_i|, 0 < s < 1$. 假设存在一组 $\{s_i\}_{i=1}^{N-1}$ 满足 $|s_i| = 1$, 使得

$$g(s_0, s_1, \dots, s_{N-1}) = 0 \quad (3)$$

则 $\{Q(x)\}_{i=0}^{N-1}$ 生成 $L^2(\mathbf{R})$ 上的 1 个连续的、具有紧支集的正交多尺度分析.

证明 假设 $|s_i| < 1$ 满足 $g(s_0, s_1, \dots, s_{N-1}) = 0$. 由 (2), (3) 式可知: $\{Q(x-l): l \in \mathbf{Z}, i = 1, \dots, N-1\}$ 是正交集, 且每个函数 $Q(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的紧支连续函数.

由 $\text{supp } Q(x) \subset [0, 2]$, 可得

$$\left\| \sum_l c_{0,l} Q(x-l) \right\|_{L^2}^2 = \sum_l c_{0,l}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(x-l)|^2 dx + \sum_l c_{0,l} c_{0,l+h} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-l-1) Q(x-l) dx + \sum_l c_{0,l} c_{0,l-h} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-l+1) Q(x-l) dx$$

根据 $\int_{-\infty}^{+\infty} |Q(x)|^2 dx = 1$, 由上式有

$$\left\| \sum_l c_{0,l} Q(x-l) \right\|_{L^2}^2 \leq \sum_l [c_{0,l+h}^2 c_{0,l}^2 + c_{0,l}^2 c_{0,l-1}^2] \leq \sum_l |c_{0,l}|^2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \left\| \sum_l c_{0,l} Q(x-l) \right\|_{L^2}^2 &= \sum_k \int_k^{k+1} \left| \sum_l c_{0,l} Q(x-l) \right|^2 dx + \\ &\sum_l \int_l^{l+1} [c_{0,l} Q(x-l) + c_{0,l-1} Q(x-(l-1))]^2 dx \end{aligned}$$

记 $\bar{e}_0 = (1, q_1, \dots, q_{N-1}, 0)$, $\bar{e}_N = (0, p_1, \dots, p_{N-1}, 1)$. 用 x 代换上式的 $x-l$, 得

$$\begin{aligned} \left\| \sum_l c_{0,l} Q(x-l) \right\|_{L^2}^2 &= \|Q\|_{L^2}^2 \sum_l \int_0^1 [c_{0,l} Q(x) + c_{0,l-1} Q(x+1)]^2 dx = \\ &\|Q\|_{L^2}^2 \sum_l \int_0^1 [c_{0,l} f_{\bar{e}_N}(x) + c_{0,l-1} f_{\bar{e}_0}(x)]^2 dx \end{aligned}$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} (af_{\bar{e}_0} + bf_{\bar{e}_N})^2 dx = \langle af_{\bar{e}_0} + bf_{\bar{e}_N}, af_{\bar{e}_0} + bf_{\bar{e}_N} \rangle =$

$$\begin{aligned} &a^2 \langle f_{\bar{e}_0}, f_{\bar{e}_0} \rangle + 2ab \langle f_{\bar{e}_0}, f_{\bar{e}_N} \rangle + b^2 \langle f_{\bar{e}_N}, f_{\bar{e}_N} \rangle = \\ &(a, b) \begin{bmatrix} \langle f_{\bar{e}_0}, f_{\bar{e}_0} \rangle & \langle f_{\bar{e}_0}, f_{\bar{e}_N} \rangle \\ \langle f_{\bar{e}_N}, f_{\bar{e}_0} \rangle & \langle f_{\bar{e}_N}, f_{\bar{e}_N} \rangle \end{bmatrix} (a, b)^T = (a, b) M (a, b)^T \end{aligned}$$

根据 $\bar{e}_0 = (1, q_1, \dots, q_{N-1}, 0)$, $\bar{e}_N = (0, p_1, \dots, p_{N-1}, 1)$, 可知 $f_{\bar{e}_0}$ 和 $f_{\bar{e}_N}$ 是线性无关的. 即对任何不同时为零的实数 a, b , 都有 $af_{\bar{e}_0} + bf_{\bar{e}_N} \neq 0$. 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} (af_{\bar{e}_0} + bf_{\bar{e}_N})^2 dx > 0$, 从而矩阵 M 是正定的. 设 λ 是矩阵 $M / \|Q\|_{L^2}^2$ 的最小特征值, 则

$$\sum_l |c_{0,l}|^2 \leq \left\| \sum_l c_{0,l} Q(x-l) \right\|_{L^2}^2 \quad (5)$$

利用条件 (2), (3), 结合 (4) 和 (5) 式可知: $\{Q(x-l): l \in \mathbf{Z}, i=1, \dots, N-1\}$ 构成 V_0 的一组标准正交基.

用类似于文 [2] 的方法, 易证明 $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} V_k = 0$.

因对所有 $x \in \mathbf{R}$, $\sum_l \left[\sum_{i=1}^{N-1} f_{e_i}(x-l) (1-p_i-q_i) + Q(x-l) \right] = 1$. 由引理 5 可得 $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k$ 在

$L^2(\mathbf{R})$ 上稠密. 根据引理 4 和定义 1 可知 $\{Q(x)\}_{i=1}^{N-1}$ 生成 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一个连续的, 且具有紧支集的正交多尺度分析.

例 1 当 $N=2$ 时, 从 $\langle f_{e_1}, f_{(0,p,1)} \rangle = 0$ 和 $\langle f_{e_1}, f_{(0,q,1)} \rangle = 0$, 利用文 [3] 方法可得到 p_1 和 q_1 关于 $s_0, \dots, s_{N-1}$ 的表达式. 把 p_1 和 q_1 代入 $\langle Q(x), Q(x+1) \rangle = \langle f_{(0,q,1,f)(0,p,1)} \rangle = 0$, 有

$$g(s_0, s_1) = 2s_1^4 + 6s_1^3 + 7s_1^2 s_0 + 18s_1^2 s_0 - 28s_1^2 - 7s_1 s_0^3 + 18s_1 s_0^2 - 14s_1 s_0 + 12s_1 + 2s_0^4 + 6s_0^3 - 28s_0^2 + 12s_0 + 8 = 0 \quad (6)$$

特别当 $s_0 = s_1$ 时, 方程 (6) 的一个解为 $s_0 = s_1 = -1/5$, 对应的 $p_1 = q_1 = -3/10$. 容易证明 $Q(x)$ 和 $Q(x+1)$ 生成 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一个连续的具有紧支集的正交多尺度分析.

参 考 文 献

- Hardin D P, Kessler B, Massopust P R. Multiresolution analyses based on fractal functions. J Approx Theory, 1992, 71: 104~120
- Geronimo J S, Hardin D P, Massopust P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions. J Approx Theory, 1994, 78 (2): 373~401
- Donovan G, Geronimo J S, Hardin D P, et al. Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions. SIAM J Math Anal, 1996, 27 (4): 1158~1192
- 齐东旭. 分形及其计算机生成. 北京: 科学出版社, 1994. 107~111
- Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Montpelier: Capital City Press, 1992. 1
- Barnsley M F. Fractal functions and interpolation. Constructive approximation, 1986, 2 (1): 303~329

Construction of Orthogonal Multiresolution Analysis Using FIF

Lu Jianzhu* Li Yuesheng

Abstract A method for constructing an orthogonal multiresolution analysis using fractal interpolation functions is presented and sufficient conditions are given for these functions to form an orthogonal multiresolution analysis of $L^2(\mathbf{R})$.

Keywords fractal interpolation function, orthogonal multiresolution analysis, iterated function system

* Department of Computer Sciences, Jinan University, Guangzhou 510632, China