

文章编号: 0529-6579 (1999) 02-0114-04

实验不确定度若干问题研究^{*}

邹书文, 林天章, 黄光桂

(中山大学物理学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究了应用 BIPM 关于实验不确定度规定的有关问题, 着重研究了标准不确定度的 u_j 计算和方差合成问题, 以及扩展不确定度的置信因子的近似计算问题.

关键词: 不确定度; B 类分量; 置信因子

中图分类号: N 37 **文献标识码:** A

不确定度是用来表示测量值由于测量误差的存在而不能肯定的程度的一个新术语. 由于对不确定度的处理和表达各国间有许多争论和不同, 国际计量局 (Bureau Internationale des Poids et Mesures, BIPM) 在听取各方面意见基础上于 1980 年提出了关于实验不确定度评定方法的建议书^[1], 逐渐成为一项国际性指导文件. 建议书已被国际上普遍接受. 为了培养的人才能适应计量科学的新发展和国际交流的需要, 我国的清华大学、复旦大学等高等院校已采取积极步骤使实验的误差教学向不确定度过渡. 受形势发展的推动, 我们开展了有关问题的研究, 争取尽快在误差教学上建立起不确定度表示新体系.

1 BIPM 建议书对传统的突破

BIPM 建议书对 A 类分量的不确定度表示的规定, 与以往处理这类误差按标准差计算而没有大的不同; 然而建议书对非统计方法计算的 B 类分量认为可用假设存在的方差或标准差去近似, 则是全新的提法, 意味着赋予 B 分量随机特征, 是对传统的突破. 正是由于此, 不但以往把误差分为偶然误差和系统误差的方法使得两类误差难于合成的问题不复存在, 而且可应用随机误差的方差合成原理来综合两类分量, 用一个统一的标准不确定度来表示. 由一个统计理论来解决两类计算问题, 更为科学.

BIPM 建议书公布后, 国际标准化组织于 1992 年颁布了《测量不确定度表达指南》^[2]. 《指南》对只有简洁要点的建议书作了详细的说明和补充, 把扩展不确定度即总不确定度提升为与标准不确定度并列使用. 我国公布的有关技术规范也有类似的规定. 这使得不确定度的国际规定, 也与工程技术部门惯用的以高置信概率的极限误差或最大误差表示的情况相一致而更具广泛性实用性. 因而, 测量不确定度可视不同应用领域采用标准不确定度或扩展不确定度表示.

2 关于标准不确定度计算问题

不确定度的计算关键是 B 类分量, 按建议书的规定, B 类分量不确定度用假设存在的

^{*} 收稿日期: 1998-05-11 作者简介: 邹书文, 男, 1940 年生, 副教授.

方差或标准差来表征. 我们知道, 方差是用来描述随机变量概率分布的性态的一个数字特征量, 是按分布而定的. 因而方差的估算, 首先是对 B 分量作出较切合实际的分布假定. B 分量来自于仪器装置、测量方法、环境条件等因素的影响, 何种影响属何种分布, 我们可利用有关资料 and 人们实践取得的共识.

确定分布后, 写出具体的概率分布函数 $\varphi(x)$. 通常, 分布对应一定的由误差限 a (如仪器检定书给出的最大允许误差) 限定的取值区间 $[-a, a]$, 因而, 根据方差定义就可计得相应的标准差 σ , 如表 1 所示 (把正态分布的 3σ 看为极限误差 a , 两点分布取对称情况). a 与 σ 的比值是随分布而定的换算因子 k , 即 $\sigma = a/k$. 如精度为 0.002 cm 的游标尺的示值误差限为 0.002 cm, 则按均匀分布处理, $k = \sqrt{3}$, $\sigma = 0.0012$ cm.

表 1 常见分布的标准差与置信水平¹⁾
Tab 1 The standard errors and confidence levels of usual distribution

分布	$\varphi(x)$	σ	P^*	分布	$\varphi(x)$	σ	P^*
正态	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), x < \infty$	$a/3$	0.683	均匀	$\frac{1}{2a}, x \leq a$	$a/\sqrt{3}$	0.577
三角	$\frac{a- x }{a^2}, x \leq a$	$a/\sqrt{6}$	0.650	反正弦	$\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, x \leq a$	$a/\sqrt{2}$	0.500
椭圆	$\frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}, x \leq a$	$a/2$	0.609	两点	$\frac{1}{2}, x = a$	a	1.000

1) $P^* = P(|x| \leq \sigma)$

计得各分量的标准差后, 就可进行方差的合成. 设量 X 的测量包含 m 项 A 类分量 S_i 和 n 项 B 类分量 u_j , 不论各分量的概率分布是否相同, 只要它们彼此独立 (否则要计入协方差) 则合成不确定度为

$$u_c(X) = \sqrt{\sum S_i^2 + \sum u_j^2} = \sqrt{S_1^2 + \cdots + S_m^2 + (a_1/k_1)^2 + \cdots + (a_n/k_n)^2} \tag{1}$$

如果测量的是一包含直接测量量 X, Y, Z 的间接量 T , 由函数 $T = F(X, Y, Z)$, 根据误差传播定律, 可得 T 的合成不确定度为

$$u_c(T) = \sqrt{\left[\frac{\partial F}{\partial X}u_c(X)\right]^2 + \left[\frac{\partial F}{\partial Y}u_c(Y)\right]^2 + \left[\frac{\partial F}{\partial Z}u_c(Z)\right]^2} \tag{2}$$

如用一分度值为 0.002 cm 的游标尺测圆柱体的体积 V , 计算它的不确定度 $u_c(V)$. 测直径 D 和高度 H 各 10 次, 得各量为: $D = D \pm S_D = 2.8950 \pm 0.0010$ cm, $H = H \pm S_H = 4.5830 \pm 0.0010$ cm, $V = \frac{\pi}{4}D^2H = 30.167$ cm³.

据前面结果, 游标尺的 $u_D = u_H = 0.0012$ cm, 由式 (1) 得

$$u_c(D) = \sqrt{(1.0 \times 10^{-3})^2 + (1.2 \times 10^{-3})^2} = 1.6 \times 10^{-3} \text{ cm}, \quad u_c(H) = 1.6 \times 10^{-3} \text{ cm},$$
 体积的合成不确定度, 由式 (2) 得

$$u_c(V) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}DH\right)^2 S_D^2 + \left(\frac{\pi}{4}D^2\right)^2 S_H^2 + \left(\frac{\pi}{2}DH\right)^2 u_D^2 + \left(\frac{\pi}{4}D^2\right)^2 u_H^2} = \sqrt{S^2(V_D) + S^2(V_H) + u^2(V_D) + u^2(V_H)}$$

代入数据最后可得 $u_c(V) = 0.034$ cm³, $V = 30.167$ (34) cm³.

我们知道，根据一定的概率分布，可计得一定区间的置信水平. 就常见的几种分布，对应由标准差构成的区间 $[-\sigma, \sigma]$ ，计得的置信水平 $P(|x| \leq \sigma)$ 如表 1. 但是，现在面对的由 $\pm u_c$ 构成的区间 $[-u_c, u_c]$ ，由于其母体是多个不同分布的混合，区间内的确切概率值不易计得，因而不是置信区间. 实际上，如若在计算过程中详细给出了各分量的分布和数值的获得方法，对测量精度的判断已给出了足够的信息.

3 关于扩展不确定度的计算问题

按照建议书，若要扩大不确定度的范围使之具有较高置信水平 P ，可将合成不确定度 u_c 乘以一个因子 K_p ，即

$$U=K_p u_c=K_p \sqrt{\sum S_i^2+\sum u_j^2}$$

(3)

可见，只有计算出与要求的置信水平相应的置信因子 K_p 才可获得扩展不确定度 U . 但是这里 K_p 的计算涉及到多重卷积，很复杂. 作为实验教学，我们认为，开始不必要求很严格，可按下述方法作粗略计算.

(1) 在诸多合成分量中，某分量为优势项，即按某分量的分布取 K_p . 就前述的几种分布，计得的相应不同置信水平 P 的 K_p 值如表 2. 如，在进行合成的各分量中优势项分量为均匀分布，就可按要求的 $P=0.997$ 或 0.990 ， 0.950 取 $K_p=1.73$ 或 1.71 ， 1.65 .

表 2 常见分布的 K_p 值

Tab 2 The K_p values of usual distribution

P	正态	三角	椭圆	均匀	反正弦	两点
0.997	3.00	2.32	1.98	1.73	1.41	1.00
0.990	2.58	2.20	1.95	1.71	1.41	1.00
0.950	1.96	1.90	1.76	1.65	1.41	1.00

(2) 当分量个数较多且各值差异不显著时，可看作近似大量、独立、均匀小随机因素情况，则由概率论的中心极限定理按正态分布取 K_p

(3) 如若按前两种情况都不很相符，可假定合成不确定度是由正态母体产生的子样标准差，于是 K_p 就是熟知的 t 分布因子 $t_p(\nu)$.

然而，查找 $t_p(\nu)$ 数值表要求给出合适的自由度 ν ，如何求得包含两类分量的合成不确定度的自由度，没有一定的相关知识是不好解决的. 为此，这里给出一个可供引用的韦尔奇-萨特思韦特 (Welch-Satterthwaite) 公式^[1]

$$\nu=u_c^4\left[\sum\frac{S_i^4}{\nu_i}+\sum\frac{u_j^4}{\nu_{Bj}}\right]$$

函数 =

(4)

式中 ν_i 是 A 类分量 S_i 的自由度，如测量次数为 n 的贝塞尔法计得的 S_i 其 $\nu_i=n-1$ ； ν_{Bj} 是 B 类分量 u_j 的自由度，可取保守值 $\nu_{Bj}=1$.

如前面测量圆柱体的例子，计算其 $P=0.95$ 的扩展不确定度. 由式 (4)，代入已有数据得 $\nu=u_c^4(V)\left[\frac{S^4(V_D)}{\nu(V_D)}+\frac{S^4(V_H)}{\nu(V_H)}+\frac{u^4(V_D)}{\nu_B(V_D)}+\frac{u^4(V_H)}{\nu_B(V_H)}\right]=3.2\approx3$ ，查表得 $K_p=t_{0.95}(3)=3.2$ ，得 $U=K_p u_c(V)=0.11\text{ cm}^3$. 因而 $V=30.17\pm0.11\text{ cm}^3$ ($P=95\%$)

这种 t 分布方法求得的扩展不确定度虽是作了定量计算, 但因有好些近似假定, 因而也是不精确的, 只是一种可供选择的估算方法.

4 误差教学向不确定度的过渡

用不确定度来评价测量质量是必然趋势, 它促使实验误差教学必须向不确定度过渡. 根据教学实际情况, 我们认为有 2 项基本工作要做.

(1) 加强统计理论基础. 以往教学上按传统的误差分类方法, 只认为偶然误差具有随机性且服从正态分布, 因而误差理论的讲述和实验数据的处理涉及统计理论知识较为有限. 然而, 新的不确定度表示体系, 视 B 类分量同样具有随机特征且有多种分布, 使得测量误差的计算向非正态分布扩展, 要深入到对多种分布的形态和有关概念如数学期望、方差、自由度、置信水平等的理解, 因而需要较多的概率论与数理统计的知识. 为此, 配合新体系的建立, 要由浅入深循序渐进, 加强必要的有关理论基础.

(2) 做好 u_j 计算的调研. 实验室的情况错综复杂, 就基础物理实验而言, 开出实验六七十个, 使用器具、仪表几百台件. 为了做好 u_j 的计算, 就要深入到实验过程对这些情况进行调查整理, 分析研究, 取得共识. 如确定仪器的误差限和误差分布, 就要摸清仪器的使用情况, 参阅各种仪器资料和国家的有关技术规范, 在某些情况还要考虑作些简化处理或对确定值作适当放大. 对有关问题经分析研究取得共识后就可作为实验室的“约定”供使用, 为过渡工作顺利开展提供最基本保证.

参考文献:

- [1] 刘智敏, 陈坤尧, 翁怀真, 等. 测量不确定度手册 [M]. 北京: 中国计量出版社, 1997. 2, 181.
- [2] 国际标准化组织. 测量不确定度表达指南 [M]. 肖明耀, 康金玉译. 北京: 中国计量出版社, 1994.

Study of Some Questions of Experimental Uncertainty

*
ZOU Shu-wen , LIN Tian-zhang, HUANG Guang-gui

Abstract: The applications of bureau internationale des poids et mesures stipulation concerning experimental uncertainty were discussed. In particular, the methods of calculating u_j and composing variance in standard uncertainty and the methods of approximately calculating confidence factor in expanded uncertainty were studied.

Keywords: uncertainty; quantity of B kind; confidence factor

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China