

文章编号: 0529-6579 (1999) 03-0007-05

非自治反应扩散方程的逼近惯性流形^{*}

殷朝阳¹, 丁伟²

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275; 2. 中山大学物理学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 着重研究了具有拟周期外力的非自治反应扩散方程解的长时间性态, 利用斜积流、延伸相平面法以及能量估计等方法, 对非自治反应扩散方程证明了逼近惯性流形的存在性, 同时构造得到一族逼近惯性流形, 对该方程的一致吸引子有比较好的逼近.

关键词: 逼近惯性流形; 一致吸引子; 能量估计

中图分类号: O 175.7 **文献标识码:** A

反应扩散方程是用来描述化学反应和生物与人口增长等许多现象的一类重要模型. 近年来, 自治的反应扩散方程解的长时间性态得到了广泛深入的研究, 全局吸引子的存在性, 吸引子的维数估计, 惯性流形和逼近惯性流形以及非线性 Galerkin 方法等结果已被许多学者所得到 (见文 [1, 2]). 同时, 人们的研究兴趣也波及到了, 在非自治情形时, 方程解的长时间性态. Haraux^[3] 利用过程的概念和性质证明了一类具有殆周期外力的非自治反应扩散方程解的一致吸引子的存在性. 随后, Chepyzhov 等^[4] 运用过程和斜积流相结合的方法, 证明了一类具有拟周期外力的非自治反应扩散方程解的一致吸引子的存在性, 并给出了一致吸引子的 Hausdorff 维数估计上界. 与此同时 Smiley^[5] 也用斜积流的方法, 证明了一类具有周期外力的非自治发展方程的逼近惯性流形. 本文着重研究具有拟周期外力的非自治反应扩散方程的长时间性态, 证明了其逼近惯性流形的存在性, 构造性地得到了一族逼近惯性流形, 同时对该方程的解轨道有比较好的逼近.

1 方程的预备知识

考虑如下反应扩散方程

$$\partial u / \partial t - d \Delta u + f(u, t) - g(x, t) = 0 \text{ in } \Omega \times \mathbf{R}, u(x, \tau) = u_\tau(x) = u_\tau \text{ in } \Omega \quad (1)$$

其中, $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 1)$ 为正规有界集, $u(x, t)$ 是定义在 $\Omega \times \mathbf{R}$ 上的实值函数. 另外系统 (1) 还满足边界条件: Dirichlet $u = 0$ on $\partial\Omega$ 或 Neumann $\partial u / \partial \nu = 0$ on $\partial\Omega$ 这里 $d > 0$ 是 1 个耗散系数, 同时还假设非线性项 $f(u, t)$ 满足如下增长性条件

$$C_1 |s|^r - C_3 \leq f(s, t)s \leq C_2 |s|^r - C_4, \forall s, t \in \mathbf{R}, r \geq 2 \quad (2)$$

* 基金项目: 国家自然科学基金 (19871094); 广东省博士后科学研究基金资助项目

收稿日期: 1998-09-14 作者简介: 殷朝阳, 男, 1968 年生, 博士后.

$$f_s'(s, t) \geq C_5, \forall s \in \mathbf{R}, |f_u'(u, t)| \leq C_6(|u|^{r-2} + 1), c_i > 0, i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3)$$

因为方程(1)是非自治系统, 还要假设 $f(u, t)$ 和 $g(x, t)$ 是拟周期的, 令 $f(u, \omega(t)), g(x, t) = G(x, \omega(t))$, 其中, $\omega(t) = (\omega_1, \dots, \omega_{k_0}), \omega(t) = (\alpha_1 t, \dots, \alpha_{k_0} t) = [\alpha t + \omega_0], \omega_0 \in T^{k_0}, \{\alpha_i\}_{i=1, \dots, k}$ 是有理独立的, $\alpha_i \in \mathbf{R}$ 且满足

$$G(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j + 2\pi, \dots, \omega_{k_0}) = G(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k_0}) \quad (4)$$

$$F(u, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j + 2\pi, \dots, \omega_{k_0}) = F(u, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k_0}) \quad (5)$$

进一步假设 $F(u, \omega(t)) \in C^\infty(\mathbf{R} \times T^{k_0}, \mathbf{R}), G \in C^\infty(T^{k_0}, L^2(\Omega))$, 且满足

$$|F_\omega^{(j)}(u, \omega)| \leq C_7(1 + |u|^{r-1}), |G_\omega^{(j)}(x, \omega)| \leq \varphi(x), \varphi(x) \in L^2(\Omega), \forall j \geq 0 \quad (6)$$

有了以上假设, 下面给出方程的函数背景. 首先令算子 $Au = -\Delta u$ 作用在 $H = L^2(\Omega)$ 上, 在 H 上赋予通常的内积记为 $(\cdot, \cdot)$ 和范数记为 $|\cdot|$, 这样 A 是 H 上的线性无界正定算子, 其中, $D(A) = \{u \in H^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$. 同样, 令 V 表示定义域为 $D(A^{1/2})$, 且带有范数 $|A^{1/2} \cdot|$, 用 $|\cdot|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$ 中的范数, $1 \leq p \leq +\infty$, 对于一切的 Banach 空间 X , 其范数用 $|\cdot|_X$ 表示.

在假设(2)~(6)下, 对于任意的 $u_\tau \in H$ 初边值问题(1)的解 $u(t)$ 存在且唯一^[4]. 由方程(1)的解存在且唯一知, 存在 1 个过程簇 $\{U_{\omega_0}(t, \tau), t \geq \tau, \tau \in \mathbf{R}\}_{\omega_0 \in H(\omega)}$ 相应于问题(1). 将相平面延伸为 $H \times T^{k_0}$, 按如下公式可得到半群 $S(t)$,

$$S(t)(u, \omega_1) = (U_{\omega_1}(t, 0)u, T(t)\omega_1), \forall t \geq 0, \forall (u_1, \omega_1) \in H \times T^{k_0}$$

且半群 $S(t), t \geq 0$ 在 $H \times T^{k_0}$ 中存在紧的吸引子 Σ . 设投影算子 $\pi: H \times T^{k_0} \rightarrow H$, 则 $\Sigma_{T^{k_0}} = \pi\Sigma$ 是过程簇 $\{U_\omega(t, \tau), t \geq \tau, \tau \in \mathbf{R}\}_{\omega \in T^{k_0}}$ 的一致吸引子^[4], 因而当 $(u_0, \omega_0) \in B(0, r_0)$, $B(0, r_0)$ 是 $H \times T^{k_0}$ 中的以 $(0, 0)$ 为中心, r_0 为半径的球, 那么存在 1 个 t_0 依赖于 r_0, Ω, d, f, g , 且满足

$$|A^{1/2}u(t)| \leq r_0, |u(t)|_\infty \leq r_0, \forall t \geq t_0 \quad (7)$$

u 的时间导数, 可写作 $u^{(j)} = \partial u / \partial t^j, j \in \mathbf{N}$. 类似可证明见文[1].

$$|A^{1/2}u^{(j)}(t)| \leq r_j, |u^{(j)}(t)|_\infty \leq r_j, \forall t \geq t_j \quad (8)$$

其中, r_j 是 1 个依赖于 j 和 (Ω, d, f, g) 的常数.

由不等式(7)知, 当 $\forall t \geq t_0$ 时, 仅需考虑 $F + G$ 的 C^∞ 截断, 令 $R(u, \omega) = \theta_r(|u|)$ ($F + G$), $\theta(s)$ 是 1 个 C^∞ 函数, $\theta: \mathbf{R}^+ \rightarrow [0, 1], \theta(s) = 1, 0 \leq s \leq 1, \theta(s) = 0, \text{当 } s \geq 2 \text{ 时}, \sup_{s \geq 0} |\theta'(s)| \leq 2, \theta_r(s) = \theta(s/r_0)$, 由算子 A 的性质, A 的特征向量簇 $\omega_j, j \in \mathbf{N}$ 构成 H 的正交基, 即

$$A\omega_j = \lambda_j\omega_j, j = 1, 2, \dots, 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_j \rightarrow +\infty, j \rightarrow +\infty$$

固定 $m, m \in \mathbf{N}$, 用 $P = P_m$ 表示 $\text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ 在 H 中的投影, $Q = Q_m = I - P_m$, 为了方便起见, 令 $\lambda = \lambda_m, \Lambda = \lambda_{m+1}, \delta = \lambda_1 / \lambda_{m+1}, p = Pu, q = Qu$. 这样相应的方程也变为

$$\partial p / \partial t + Ap + PR(p + q, \omega(t)) = 0 \quad (9)$$

$$\partial q / \partial t + Aq + QR(p + q, \omega(t)) = 0 \quad (10)$$

$$\partial \omega / \partial t = \alpha, (p(\tau), q(\tau), \omega(\tau)) = (p_\tau, q_\tau, \omega_\tau) \quad (11)$$

另外对 $\forall \alpha > 0$, 有如下估计

$$\begin{aligned} |A^{\alpha+1/2}p|^2 &\leq \lambda |A^\alpha p|^2, \quad \forall p \in PD(A^{\alpha+1/2}), \\ |A^{\alpha+1/2}q|^2 &\geq \Lambda |A^\alpha q|^2, \quad \forall q \in QD(A^{\alpha+1/2}) \end{aligned} \quad (12)$$

2 逼近惯性流形的构造

本节借助于文[1]的方法,对方程(9)~(11)构造了逼近惯性流形序列 $\mu_i, i \in \mathbf{N}$.

引理1^[6] 假设条件(2)~(6)成立,那么对所有的 $j \in \mathbf{N}$, $\exists t_j$ 依赖于 (Ω, d, f, g) 以及 r_0 , 当 $(|u_\tau|^2 + |\omega_\tau|^2)^{1/2} \leq r_0$ 时, 成立有

$$|q^{(j)}(t)|^2 \leq C\delta |A^{1/2}q^{(j)}(t)|^2 \leq C\delta^{1/2}, \quad \forall t \geq t_j \quad (13)$$

首先构造 μ_1 , 由引理1知, 当 t 很大时, $q(t)$ 和 $q^{(1)} = dq/dt$ 相比较小. 因此, 在方程(10)中 $q^{(1)}$ 相对于 Aq , q 相对于 p 和 ω 是可以忽略的, 这样可得方程(10)的逼近方程: $Aq + QR(p, \omega(t)) = 0$, 对于任给的 $(p, \omega) \in PH \times T^k_0$, 由上式可得其解, 定义为 $q_1 = \Phi_1(p, \omega)$, 映像 $\Phi_1: PH \times T^k_0 \rightarrow QD(A)$ 的图像 μ_1 在 H 中形成了1个 C^∞ 的 $m+k_0$ 维的光滑流形. 下面给出 μ_1 的一些性质.

引理2 假设条件(2)~(6)成立, 那么当 t 充分大时, 方程(9)~(11)的任何解 $(u(t), \omega(t))$ 在 $H \times T^k_0$ 中和 μ_1 的距离不超过 $c\delta$; 其中 c 是1个依赖初值的常数.

证明 令 $u = p + q$ 是方程(9)~(11)的解, 对每个 $t \in \mathbf{R}$, 定义 $\omega = \omega(t)q_1(t) = \Phi_1(p(t), \omega(t))$, 那么 $(p(t) + q_1(t), \omega(t)) \in \mu_1$, 且有

$$\text{dist}((u(t), \omega(t)), \mu_1) = \inf_{(v, \sigma) \in \mu_1} (|u(t) - v(t)|^2 + |\sigma(t) - \omega(t)|^2)^{1/2} \leq |q(t) - q_1(t)|$$

以下估计 $|q(t) - q_1(t)|$, 由 q_1 的推导过程知 $|A(q_1(t) - q(t))| \leq |R(p + q, \omega) - R(p, \omega)| + |q'|$, 再利用 R' 的有界性和引理1可得: $|A(q_1(t) - q(t))| \leq C\delta$ 当 $t \geq \max(t'_0, t'_1)$ 时, 再由(12)式得 $|q_1(t) - q(t)| \leq C\delta$, 证毕.

下面, 再给出 μ_2 的构造. 因 $q_1 = \Phi_1(p, \omega)$, 故可用 $QR(p + q_1, \omega)$ 来逼近 $QR(p + q, \omega)$, 再考虑如下方程

$$q^{(2)} + Aq^{(1)} + QR'((p + q, \omega))(p^{(1)}, q^{(1)}) = 0 \quad (14)$$

在(14)式中, $p^{(1)}$ 可用 $p^{(1)}_1 = -Ap - PR(p, \omega)$ 来逼近. 这样 $q^{(2)}$ 可以不考虑, 非线性项 $QR'((p + q, \omega))(p^{(1)}, q^{(1)})$ 可用 $QR'(p, \omega)p^{(1)}_1$ 来代替, 方程(14)可化为 $Aq^{(1)}_1 + QR'(p, \omega)p^{(1)}_1 = 0$, 解得 $q^{(1)}_1$ 后, 有: $q^{(1)}_1 + Aq^{(1)}_2 + QR(p + q_1, \omega) = 0$, 从而可定义 $q_2 = \Phi_2(p, \omega)$, Φ_2 的图像: $PH \times T^k_0 \rightarrow QD(A)$ 定义了1个 C^∞ 流形 μ_2 , 且 $\dim \mu_2 = m + k_0$, 进而可证得 μ_2 比 μ_1 对轨道的逼近更好.

引理3 假设条件(2)~(6)成立, 那么当 t 充分大时, 方程(9)~(11)的任何轨道和 μ_2 的距离不大于 $c_2\delta$. 其中, c_2 是依赖初值的常数, t_2 依赖初值和 r_0 .

证明类同于引理2, 证明从略.

以下用递归的方法构造 μ_k . μ_k 的构造依赖于 $p^{(i)}_{k-i}, i = 1, \dots, k-1$ 和 $q^{(i)}_{k-i}, i = 0, \dots, k-1$ 的构造. 其中, $p^{(i)}_{k-i}$ 是 $p^{(i)}$ 的逼近, $q^{(i)}_{k-i}$ 是 $q^{(i)}$ 的逼近.

当 $k = 1$ 时, 由 $q_1 = \Phi_1(p, \omega)$, 定义了 μ_1 , 假设 $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$ 已经定义 ($k \geq 2$), 那么要构造 μ_k , 因为 μ_k 的构造依赖于 $p^{(i)}_{k-i}$ 和 $q^{(i)}_{k-i}$, 所以下面计算出序列 $p^{(i)}_{k-i}, i = 1, \dots, k-1$, 首先

将方程(9)关于时间 t 微分 $(i-1)$ 次, 即得

$$p^{(i)} + Ap^{(i-1)} + PR_{i-1}(p + q, p^{(1)} + q^{(1)}, \dots, p^{(i-1)} + q^{(i-1)}, \omega) = 0 \quad (15)$$

再将(15)式的时间导数 $p^{(1)}, q^{(1)}$ 用 $p_\alpha^{(1)}, q_\beta^{(1)}$ 来代替, 得

$$p_{k-i}^{(i)} = -Ap_{k-i+1}^{(i-1)} - PR_{i-1}(p + q_{k-i+1}, p'_{k-i+1} + q'_{k-i}, \dots, p_{k-i+1}^{i-2} + q_{k-i+1}^{i-2}, p_{k-i}^{i-1} + q_{k-i}^{i-1}, \omega) \quad (16)$$

且令 $p_l^0 = p, \forall l \geq 1, q_0^l \geq 0, l \geq 1$. 利用(16)式右边的量都可从 $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$ 的构造和关于 i 增加的第 $i-1$ 步递归模式中得, 这样很好地定义了序列 $p_{k-i}^i (i = 1, \dots, k-1)$. 同理, 可计算 $\{q_{k-i}^i\}_{i=1, \dots, k-1}$, 将方程(10)关于时间 t 微分 i 次, 再用相应的量作逼近替换得

$$q_{k-i+1}^{i+1} + Aq_{k-i}^i + QR_i(p + q_{k-i-1}, p'_{k-i+1} + q'_{k-i}, \dots, p_{k-i+1}^{i-1} + q_{k-i+1}^{i-1}, p_{k-i}^i + q_{k-i}^i, \omega) = 0 \quad (17)$$

且令 $q_0^l = 0, \forall l \geq 1$, 和 $p_l^0 = p, \forall l \geq 1$, 由(17)式, 关于 i 减少进行递归, 第 i 步可得 q_{k-i}^i , q_{k-i}^i 可以看成是 $q^{(i)}$ 的逼近.

这样当 $i = k-1$ 时, 有 $q_{k-i+1}^{i+1} = q_0^k = 0$, 从而 $q_k = q_0^k$ 可由 $i = 0$ 时的(17)式得出

$$q'_{k-1} + Aq_k + QR(p + q_{k-1}, \omega) = 0 \quad (18)$$

显然由(18)式可定义: $q_k(t) = \Phi_k(p(t), \omega(t))$, $\Phi_k: PH \times T^{k_0} \rightarrow QD(A)$, 令 μ_k 等于 Φ_k 的图像, 那么 μ_k 就是 1 个 $H \times T^{k_0}$ 上的维数为 $m + k_0$ 的 C^∞ 流形. 同样, μ_k 对轨道的逼近比 $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$ 要好.

下面再给出 2 个主要引理.

引理 4 假设 $n \leq 4$, 那么对 $(u, u_1, \dots, u_l, \omega_1) \in L^2(\Omega) \times (D(A) \times L^\infty(\Omega))^{l-1} \times (L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times T^{k_0}$ 和 $(v, v_1, \dots, v_{l-1}, v_l, \omega_2) \in L^2(\Omega) \times (D(A))^{l-1} \times L^2(\Omega)$, 当 $|u| \leq r_0, |v| \leq r_0, |u_i| \leq r_0, |Au_i| \leq r_0, |Av_i| \leq r_0, \forall i = 1, \dots, l-1$ 和 $|u_l| \leq r_0, |v_l| \leq r_0, |\omega_1|_{T^{k_0}} \leq r_0, |\omega_2|_{T^{k_0}} \leq r_0$ 时, 有

$$|R_l(u, u_1, \dots, u_{l-1}, u_l, \omega_1) - R_l(v, v_1, \dots, v_l, \omega_2)| \leq c(r_0)(|u - v| + |A(u_1 - u_2)| + \dots + |A(u_{l-1} - v_{l-1})| + |u_l - v_l| + |\omega_1 - \omega_2|_{T^{k_0}})$$

证明可参见文[1], 与其证明类同. 利用引理 4 可得到如下引理 5.

引理 5 在 μ_k 的构造中, 主要依赖于 $p_{k-i}^i, i = 1, \dots, k-1$ 和 $q_{k-i}^i, i = 0, \dots, k-1$ 的构造, 其中 p_{k-i}^i 是 $p^{(i)}$ 的逼近, q_{k-i}^i 是 $q^{(i)}$ 的逼近, 并满足

$$\begin{aligned} |p_{k-i}^i(t) - p^{(i)}(t)| &\leq C_k \delta^{*-i}, i = 1, \dots, k-1, \\ |q_{k-i}^i(t) - q^{(i)}(t)| &\leq C_k \delta^{*-i+1}, i = 0, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (19)$$

对 $\forall t \geq t_k''$ 成立, 且 $(|u_\tau|^2 + |\omega_\tau|^2)^{1/2} \leq r_0$.

证明可参见文[6]. 下面给出本文的主要定理.

定理 1 假设条件(2)~(6)成立, 且 $n \leq 4$, 那么当 t 充分大时, $t \geq t_k^*$, 方程(9)~(11)的任何解在 $H \times T^{k_0}$ 上和 μ_k 的距离不大于 $c_k \delta^{*+1}$, c_k 是 1 个常数, 依赖于 (d, Ω, R, r_0) .

证明 令 $u(t) = p(t) + q(t)$ 是(9)~(11)的解, 下面估计 $q_k(t) - q(t)$.

用(10)式减去(18)式, 整理得

$$A(q_k(t) - q(t)) = Q(R(p + q, \omega) - R(p + q_{k-1}, \omega)) + q^{(1)} - q'_{k-1}$$

因而 $|A(q_k(t) - q(t))| \leq |R(p + q, \omega) - R(p + q_{k-1}, \omega)| + |q^{(1)} - q'_{k-1}|$

由 $R(u, \omega)$ 的有界性知

$$|A(q_k(t) - q(t))| \leq c_k |q - q_{k-1}| + |q^{(1)} - q'_{k-1}| \quad (20)$$

再由假设 (19) 知, (20) 可变为: $|A(q_k - q)| \leq c_k \delta^k, \forall t \geq t''_{k-1}$, 从而有 $|q_k - q| \leq c_k \delta^{k+1}, \forall t \geq t''_{k-1}$, 因此 $\text{dist}((u(t), \omega), \nu_k) \leq |u(t) - u_k| \leq |q_k - q| \leq c_k \delta^{k+1}$, 证毕.

参考文献:

- [1] DEBUSSCHE A, MARION M. On the construction of families of approximate inertial manifolds [J]. J Differential Equations, 1992, 100: 173~201.
- [2] TEMAN R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics [A]. Applied Mathematics Series [C]. New York: Springer-Verlag, 1988. 80~102.
- [3] HARAUX A. Attractors of asymptotically compact processes and applications to nonlinear partial differential equations [J]. Comm P D E, 1988, 13: 1383~1414.
- [4] CHEPYZHOV V V, VISHIK M I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension [J]. J Math Pures Appl, 1994, 73: 279~333.
- [5] SMILEY M W. Regularity and asymptotic behavior of solutions of nonautonomous differential equations [J]. J and Differential Equations, 1995, 7 (2): 237~262.
- [6] 殷朝阳. 非自治无穷维动力系统的逼近 惯性流形和非线性 Galerkin 方法 [D]. 广州: 中山大学, 1998. 6~18.

Approximate Inertial Manifold for Nonautonomous Reaction-Diffusion Equation

YIN Zhao-yang^{*}, DING Wei

Abstract: In this article, the long time behavior of nonautonomous reaction-diffusion equation with quasiperiodic external force is studied. By the methods of skew-product, extended phase space and energy estimate etc, the existence of approximate inertial manifolds for nonautonomous reaction-diffusion equation is proved, and the family of approximate inertial manifolds is constructed, and the sequences of such manifolds provide better approximations to the uniform attractor.

Keywords: approximate inertial manifold; the uniform attractor; energy estimate

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China