

文章编号: 0529-6579 (1999) 03-0107-02

关于梅森素数分布性质的猜想^{*}

岑成德

(中山大学管理学系, 广东 广州 510275)

摘要: 提出了关于梅森素数分布规律的一种猜想: 梅森素数的指数 p 的二阶差分序列的每 5 项中都有 3 项非负值与 2 项负值. 并由此推论: 在 $1\,398\,269 < p < 2\,976\,221$ 范围内至少还存在 1 个 p 值使 M_p 为梅森素数.

关键词: 素数; 梅森素数; 猜想; 二阶差分

中图分类号: O 156 1 **文献标识码:** A

形如 $2^p - 1$ (p 为素数) 的数称为梅森数, 记为 M_p ; M_p 中的素数称为梅森素数(Mersenne prime). 近半世纪以来, 人们所发现的已知最大素数都是梅森素数. 研究梅森素数的分布规律, 无疑对寻找新的梅森素数及探索是否存在无穷多的梅森素数都具有十分重要的意义^[1]. 而梅森素数的分布极不规则, 使得寻找其分布规律成为一个难题.

笔者通过大量的观察、分析及试验, 对梅森素数的分布规律提出了一种猜想.

表 1 列出了迄今已发现的所有梅森素数的指数 p 及其一阶差分 Δp 与二阶差分 $\Delta^2 p$.

由表 1 可看到, 将二阶差分数列 $\{\Delta^2 p_n\}$ 从首项开始依次划分为 5 项一组, 则每组中都有 3 项为非负值、2 项为负值. 因此, 提出如下猜想.

猜想 1 梅森素数的指数 p 所形成数列的二阶差分数列 $\{\Delta^2 p_n\}$ 具有如下性质: 如果从首项开始按 5 项一组来划分, 则每组中恰有 3 项非负值和 2 项负值.

奇妙的是本猜想中涉及的 3 个数字——2(负值项数)、3(非负值项数)和 5(每组项数)恰好是最初的 3 个素数, 也恰是梅森素数的指数 p 的最初 3 个.

注意到表 1 中未确定位次的最后 2 个 p 值所在组的 5 项二阶差分中有 3 项为负值. 所以, 如果猜想 1 成立, 则可作如下推论.

推论 1 在 $1\,398\,269 < p < 3\,021\,377$ 范围内, 至少存在 1 个异于 2 976 221 的 p 值使 M_p 为梅森素数.

推论 2 在 $1\,398\,269 < p < 2\,976\,221$ 范围内, 至少存在 1 个 p 值使 M_p 为梅森素数.

实际上, 如果推论 2 不成立, 则按推论 1 可知在 $2\,976\,221 < p < 3\,021\,377$ 中至少有 1 个 p 值使 M_p 为梅森素数. 但易看出, 这样的 p 值中的第 1 个无论取何值, 其对应的二阶差分都是负值(因为 $3\,021\,377 - 2\,976\,221 = 45\,156$ 小于上 1 个一阶差分 1 577 952); 在此情形下形成的 5 项一组的二阶差分中就有 3 项负值, 这与猜想 1 矛盾.

* 收稿日期: 1999-01-29

作者简介: 岑成德, 男, 1958 年生, 副教授.

最后要说明的是,对于猜想 1 对已确定位次的梅森素数都成立这一事实,我们不能完全排除存在巧合的可能性. 但笔者经计算得到这种巧合发生的概率不足 0.1%. 计算的方式是,假设每一个二阶差分取负值或非负值是随机的,其概率均为 1/2. 按二项分布则可算出已知 6 组均含 2 项负值与 3 项非负值的概率为 0.000 93.

表 1 梅森素数的指数及其一、二阶差分

Tab 1 Indices and their first and second order differences of Mersenne primes

位次	p	Δp	$\Delta^2 p$	位次	p	Δp	$\Delta^2 p$
1	2	—	—	18	3 217	936	858
2	3	1	—	19	4 253	1 036	100
				20	4 423	170	— 866
				21	9 689	5 266	5 096
				22	9 941	252	— 5 014
3	5	2	1	23	11 213	1 272	1 020
4	7	2	0	24	19 937	8 724	7 452
5	13	6	4	25	21 701	1 764	— 6 960
6	17	4	— 2	26	23 209	1 508	— 256
7	19	2	— 2	27	44 497	21 288	19 780
8	31	12	10	28	86 243	41 746	20 458
9	61	30	18	29	110 503	24 260	— 17 486
10	89	28	— 2	30	132 049	21 546	— 2 714
11	107	18	— 10	31	216 091	84 042	62 496
12	127	20	2	32	756 839	540 748	456 706
13	521	394	374	33	859 433	102 594	— 438 154
14	607	86	— 308	34	1 257 787	398 354	295 760
15	1 279	672	586	35	1 398 269	140 482	— 257 872
16	2 203	924	252	?	2 976 221	1 577 952	1 437 470
17	2 281	78	— 846	?	3 021 377	45 156	— 1 532 796

参考文献:

[1] 周海中. 关于 M_p 素数 [J]. 科技导报 (粤版), 1991 (1, 2): 8~11

A Conjecture at the Distribution of Mersenne Primes

CEN Cheng-de*

Abstract: This paper presents a conjecture at the distribution of Mersenne primes: from the 3rd Mersenne prime, there are 3 non-negative values and 2 negative values under every five terms of a 2nd-order difference sequence of indices p 's of the Mersenne primes. And comes the deduction that there is at least a p when $1\,389\,269 < p < 2\,976\,211$, which makes M_p the Mersenne prime.

Keywords: prime; Mersenne prime; conjecture; 2nd-order difference

* Department of Management, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net