

文章编号: 0529-6579 (2000) 01-0001-04

一类 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度^{*}

马东魁

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广州 510275)

摘 要: 提出平衡分布的概念, 给出满足一定条件的平衡分布的所有 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度的准确值.

关键词: 分形; Hausdorff 测度; Sierpinski 地毯; 平衡分布; 基本条件

中图分类号: O174.12 **文献标识码:** A

计算与估计 Hausdorff 测度是分形几何中很困难的课题, 除 Cantor 三分集这样一些直线上的分形以及文献 [1] 中给出一个 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度之外, 还没有其他非平凡的分形的 Hausdorff 测度被计算出来, 到目前为止, 还没有一种普遍适用于计算一类分形的 Hausdorff 测度的方法, 而都是采用具体问题具体对待的方式. 本文发展了文 [1] 的方法, 提出平衡分布的概念, 给出满足一定条件的平衡分布的所有 Sierpinski 地毯 Hausdorff 测度的准确值.

平面 $\mathbf{R}^2$ 上的单位正方形, 记作 S_0 , n 为自然数且 $n \geq 4$, 在 S_0 中保留 n 个小正方形, 其边长为 $1/n$, 而挖去其余部分的内部, 得到的集合记为 S_1 , S_1 中 n 个小正方形的排列满足 4 个顶角各有 1 个小正方形, 且两两距离大于 0, 每个小正方形的边平行于 S_0 的边, 对 S_1 的每个小正方形重复上述过程, 得到的集合记作 S_2 , 无限重复上述过程, 得到

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset \cdots$$

非空集合 $S = \bigcap_{m=0}^{\infty} S_m$ 称作 n -Sierpinski 地毯.

S 是由 n 个压缩比为 $1/n$ 的压缩函数生成的自相似集, 且满足开集条件, 因此 S 的 Hausdorff 维数 $s = \dim_{\text{H}}(S)$ 等于它的自相似维数, 由方程 $n(1/n)^s = 1$ 决定^[2], 即 $s = 1$. 用 $H(S)$ 表示 S 的 1 维 Hausdorff 测度. $n = 4$ 时, 即文 [1] 所讨论的 Sierpinski 地毯.

1 准备工作

设 $m \geq 0$, 则 S_m 是由 n^m 个边长为 $1/n^m$ 的正方形组成, 每个这样的正方形称作 S_m 的基本正方形, 记作 $\square_m$, 显然在 $\square_m$ 上可以生成一个与 S 有相似比为 $1/n^m$ 的 Sierpinski 地

^{*} 基金项目: 国家教委博士点基金资助项目 (9555810); 广东省自然科学基金资助项目 (960014)

收稿日期: 1999-03-15 作者简介: 马东魁 (1964~), 男, 博士研究生, 讲师.

毯, 记作 $1/n^m - \square_m$, 由 Hausdorff 测度的性质有 $H(1/n^m - \square_m) = 1/n^m H(S)$

在 S_0 上定义分布函数 μ , 满足

$$\mu(S_0) = \sqrt{2}, \quad \mu(\square_m) = 1/n^m \sqrt{2}, \quad \mu(S_0 - S) = 0$$

易证 μ 是 S_0 上的一个测度, 限制 μ 在 S 上是 S 上的一个质量分布.

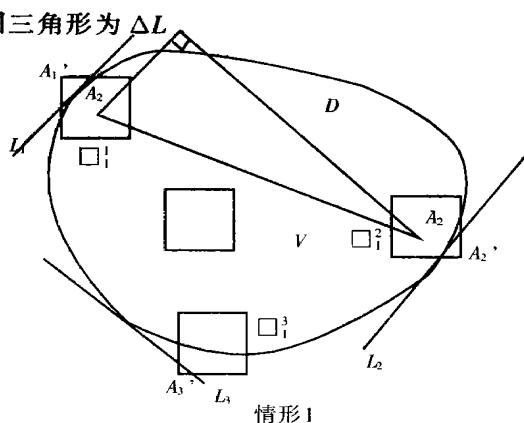
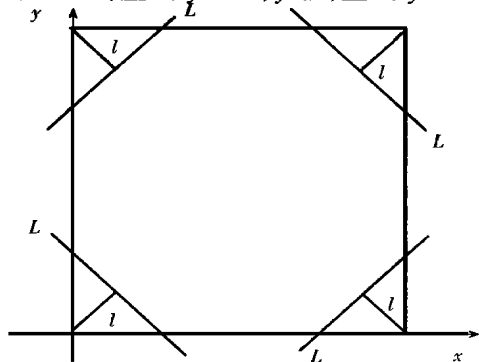
据文 [3] 命题 1 和推论, 易证

$$H(S) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |U_k| \mid \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k \supset S_0 \right\}$$

其中, $U_k \subset \mathbf{R}^2, \forall k \geq 0$, 用 $|U_k|$ 表示 U_k 的直径, 因此, $H(S) \leq |S_0| = \sqrt{2}$.

如下所示建立直角坐标系, S_0 的主或斜对角线的方程分别为 $x = y$ 和 $x + y = 1$.

记 L 是平行于 S_0 的主或斜对角线且与 S_0 相交的一直线, 记 $d((x, y), L) = l \geq 0$. 其中, $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$. 又记 L 分别与 x 轴, y 轴; x 轴, 直线 $x = 1$; 直线 $x = 1$, 直线 $y = 1$; y 轴, 直线 $y = 1$ 所围三角形为 ΔL .



定义 1 条件 $\mu(\Delta L \cap S_0) \geq l/2, (0 \leq l \leq \sqrt{2})$, 叫做基本条件.

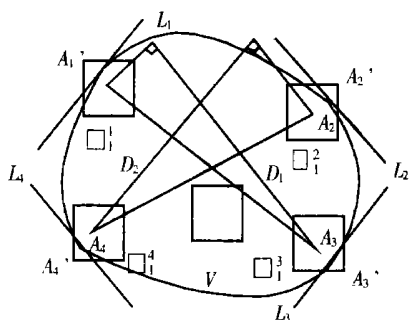
显然若 S_0 满足基本条件, 则 $\square_m$ 也满足基本条件 ($m \geq 0$). 为了引入平衡分布的概念, 先对 S_1 中基本正方形的分布作如下规定: S_1 中任意 m 个基本正方形必须满足下列条件之一 ($2 \leq m \leq n$).

(1) 此 m 个基本正方形中存在 2 个, 它们在 S_0 的某一边上正交投影间距离不小于 $(2m-3)/n, (2 \leq m \leq n-2)$.

(2) 取此 m 个基本正方形的中心得到 m 个点, 存在其中 2 个基本正方形记为 $\square_1, \square_2$, 其中心连线 $A_1 A_2$ 在 S_0 的主或斜对角线上的正交投影的长度记为 D , 满足 $D \geq (m/n)\sqrt{2}$ (情形 1). ($3 \leq m \leq n-1$).

(3) 此 m 个基本正方形中, 存在其中 4 个基本正方形, 记为 $\square_1, \square_2, \square_3, \square_4$, 其中心分别记为 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 连线 $A_1 A_3$ 在 S_0 的主(斜)对角线上的正交投影长记为 $D_1, A_2 A_4$ 在 S_0 的斜(主)对角线上的正交投影长记为 D_2 , 满足 $D = (D_1 + D_2)/2 \geq \sqrt{2}(m-1)/n$ (情形 2).

($4 \leq m \leq n$).



情形 2

定义 2 上面定义的 D 分别称为 m 个基本正方形的准直径.

定义 3 若 S_1 中基本正方形之分布满足上述规定, 则称 S 为满足平衡分布的 n -Sierpinski 地毯.

2 主要结果与证明

定理 所有满足基本条件且平衡分布的 n -Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度为

$$H(S) = \sqrt{2}.$$

先证下列引理.

引理 对满足基本条件且平衡分布的 n -Sierpinski 地毯, 则任意 $V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 有 $\mu(V) \leq |V|$.

证明 ① 设 $V \supset S_0$ 显然 $\mu(V) = \sqrt{2}$, $|V| \geq \sqrt{2}$. ② 设 V 包含 S_1 的一个基本正方形而与另外 $n-1$ 个不相交, 显然 $\mu(V) = \sqrt{2}/n$, $|V| \geq \sqrt{2}/n$. $\mu(V) \leq |V|$ 成立. ③ 设 V 与 m 个 S_1 中基本正方形相交, 而与其余的不交, 此 m 个基本正方形满足上面规定的(2), ($m \geq 3$). 不妨设 V 在情形 1 所示的位置, 在 $\square_1$ 中作直线 L_i , 使之分别与 S_0 的主或斜对角线平行, 并且使 V 包含在 L_i 围成的区域内, 且 V 与 L_i 均相交, 设 L_i 与 $\square_1$ 的一顶点 A'_i 的距离为 l_i , ($i = 1, 2, 3$). 结合平衡分布条件

$$|V| \geq (D - \sqrt{2}/n) + \sqrt{2}/n - l_1 + \sqrt{2}/n - l_2 \geq \sqrt{2}(m+1)/n - l_1 - l_2$$

结合基本条件有

$$\mu(V) \leq \frac{m}{n}\sqrt{2} - \sum_{i=1}^3 \mu(\Delta L_i \cap \square_1) \leq \frac{m}{n}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 l_i$$

所以 $|V| \vdash \mu(V) \geq 0$

即 $\mu(V) \leq |V|$ 成立.

④ 情形 2, 设 V 与 S_1 中 m 个基本正方形相交, 而与其余的不交, 此 m 个基本正方形满足上面规定的(3), 不妨设 V 在情形 2 所示的位置, L_i, l_i 意义同③, ($i = 1, 2, 3, 4$).

则 $|V| \geq (D_1 - \sqrt{2}/n) + (\sqrt{2}/n - l_1) + (\sqrt{2}/n - l_3) = D_1 + \sqrt{2}/n - l_1 - l_3$

$$|V| \geq (D_2 - \sqrt{2}/n) + (\sqrt{2}/n - l_2) + (\sqrt{2}/n - l_4) = D_2 + \sqrt{2}/n - l_2 - l_4$$

结合平衡分布条件

$$|V| \geq \frac{D_1 + D_2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 l_i \geq \frac{m}{n}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 l_i$$

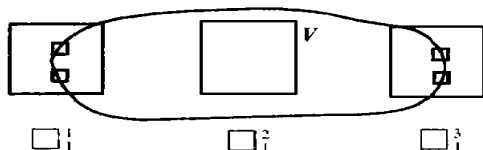
结合基本条件有

$$\mu(V) \leq \frac{m}{n}\sqrt{2} - \sum_{i=1}^4 \mu(\Delta L_i \cap \square_1) \leq \frac{m}{n}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 l_i$$

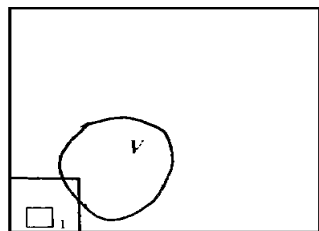
此时 $\mu(V) \leq |V|$ 成立.

⑤ 再针对上面规定 (1) 的情形证明, ($m \geq 2$). 只对 m 个基本正方形距离等于 $(2m-3)/n$, 且 m 个基本正方形中心连线平行于 S_0 的边的情形证明(情形 3), 以 $m = 3$ 为例.

设这些基本正方形为 $\square_i, i = 1, 2, \dots, m$. 两端的基本正方形为 $\square_1, \square_m$, 不妨设 V 如情形 3 所示, 包含 $\square_1, \dots, \square_{m-1}$, 设 V 与 $\square_1$ 中 m_1 个 S_2 基本正方形相交, 而与其余的不交, V 与 $\square_m$ 中 m_2 个 S_2 基本正方形相交, 与别的不交, 这相当于 V 与 $m_1 + m_2 + (m-2)n$ 个



情形 3



情形 4

S_2 基本正方形相交, 与别的不交. 不妨设 $\square_1^n$ 中这 m_1 个基本正方形及 $\square_2^n$ 中这 m_2 个 S_2 基本正方形的分布情形符合上述规定的 (3) 情形, 其余情形类似考虑. D_i 的意义如情形 2 所示, $(D_1+D_2)/2$, $(D_3+D_4)/2$ 分别代表 $\square_1^n$ 中 m_1 个 S_2 基本正方形及 $\square_2^n$ 中 m_2 个基本正方形的准直径. 由情形 3 可见, $m_1+m_2+(m-2)n$ 个 S_2 中基本正方形的准直径

$$D = \frac{(D_2+D_3+\sqrt{2}/n^2 + (m-2)\sqrt{2}/n) + (D_1+D_4+\sqrt{2}/n^2 + (m-2)\sqrt{2}/n)}{2}$$

由于 $\square_1^n$, $\square_2^n$ 均满足平衡分布条件, 则

$$\frac{D_1+D_2}{2} \geq \frac{m_1-1}{n^2}\sqrt{2}, \quad \frac{D_3+D_4}{2} \geq \frac{m_2-1}{n^2}\sqrt{2}$$

$$\text{于是 } D \geq \frac{(m_1-1) + (m_2-1) + 1 + (m-2)n}{n^2}\sqrt{2} = \frac{m_1+m_2+(m-2)n-1}{n^2}\sqrt{2}$$

在 S_2 中重复 ④ 的过程, 可证 $\mu(V) \leq |V|$.

⑥ 设 V 只与 S_1 的一个基本正方形 $\square_1$ 相交, 其余不相交 (情形 4). 则有 $|V| \geq |V \cap \square_1|$, 在 $\square_1$ 上重复上述几种情形, 亦可证 $\mu(V) \leq |V|$ 成立, 综上所述, 引理得证.

定理的证明 据质量分布原理^[4], 结合上面引理容易证明 $H(S) \geq \mu(S) = \sqrt{2}$. 而 $H(S) \leq \sqrt{2}$ 是明显的.

附注 作者将在另文讨论本文定理的应用, 给出一些具体实例.

致谢: 感谢周作领教授的指导.

参考文献:

- [1] 周作领, 吴敏. 一个 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学(A 辑), 1999, 29(2): 138 ~ 144.
- [2] FALCONER K. Fractal geometry—mathematical foundations and applications[M]. New York: John Wiley and Sons, 1990. 55.
- [3] ZHOU Z L. The Hausdorff measures of the self-similar sets. The Koch curve[J]. Science in China, 1998, 28(2): 103 ~ 107.

Hausdorff Measures of a Class of Sierpinski Carpets

MA Dong-kui *

Abstract: The definition of balanced distribution as well as the exact values of Hausdorff measures of all Sierpinski carpets that satisfy balanced distribution and another condition are given.

Keywords: fractal; Hausdorff measure; Sierpinski carpet; balanced distribution; basic condition

* Department of Scientific Computing and Computer Applications Zhongshan University, Guangzhou 510275, China