

文章编号: 0529-6579 (1999) 05-0001-03

Hausdorff 测度的计算与估计^{*}

周作领¹, 冯 力²

(1. 中山大学岭南(大学)学院, 广州 510275; 2. Darton College, Albany, CA 31707, USA)

摘 要: 把计算 Hausdorff 测度转化成极限过程, 对一般分形得到 1 个一般模型, 而对自相似集则得到 1 个约化模型. 作为应用, 得到 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的较好上限.

关键词: 分形; 自相似集; Hausdorff 维数与测度; Sierpinski 垫片

中图分类号: O 174.12 **文献标识码:** A

众所周知, Hausdorff 测度的计算与估计是一个非常困难的问题. 目前的形势是, 除了像中间三分 Cantor 集这样少数几个直线上的分形外, 还没有任何非平凡的分形的 Hausdorff 测度被计算出来, 包括相对较简单的自相似集. 一个可能的出路是把问题转化成可以逐步搜索的极限过程或模型. 经典的上密度理论为此提供了可能, 但这样得到的模型一般都是不可操作的. 满足开集条件的自相似集有较好的微结构, 适当限制覆盖的范围, 可以得到一个可操作的约化模型, 但代价是它的最好结果已不一定是 Hausdorff 测度的准确值, 而是它的一个上限. 至于这个上限是否就是它的准确值, 则需进一步讨论. 本文建立一般模型, 并以 Sierpinski 垫片为例, 建立约化模型. 作为应用, 得到 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的较好上限. 本文证明细节将另行给出.

关于 Hausdorff 维数与测度的定义和常用符号, 见文 [1]. 特别要指出的是, 一般而言如果限制在定义中的覆盖范围, 得到的将是 Hausdorff 测度的上限.

设 $E \subset \mathbf{R}^m (m \geq 1)$ 是 s -集 ($s \geq 0$), 其中 $s = \dim_{\text{H}}(E)$ 是 E 的 Hausdorff 维数, 并用 $H^s(E)$ 表示 E 的 s -维 Hausdorff 测度.

设 $x \in U \subset \mathbf{R}^m$ 并用 $|U|$ 表示 U 的直径. 定义

$$\overline{D}_c^s(E, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sup_{0 < |U| < \delta} \frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s} \right\}$$

称作 E 在 x 点处的凸上密度, 一般这里的 U 可取作闭凸集, 因而是可测集. 下面的结果是已知的.

引理^[1] $\overline{D}_c^s(E, x) = 1$ H^s -几乎处处成立.

用 $B(\mathbf{R}^m)$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 的 Borel σ -代数. 定义非负函数 $F: B(\mathbf{R}^m) \rightarrow \mathbf{R}^+$

* 基金项目: 国家教委博士点基金 (9555810) 资助项目; 广东省自然科学基金 (960014) 资助项目

收稿日期: 1998-11-11

作者简介: 周作领, 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师.

使得 $F(U) = \frac{H^s(E)}{H^s(E \cap U)} \mid U \mid^s$ (规定当 $H^s(E \cap U) = 0$ 时 $F(U) = +\infty$).

定理 1 存在可测集合序列 $U_n \subset \mathbf{R}^m (n \geq 0)$, 使得 $F(U_n) \rightarrow H^s(E)$

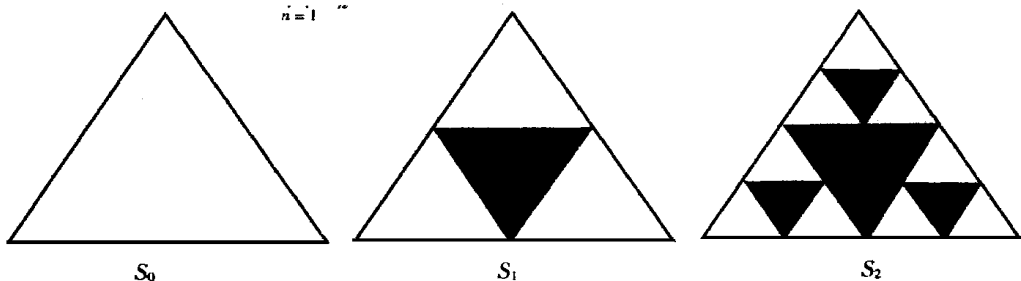
当 E 是满足开集条件的自相似集时, 则有

$$H^s(E) = \inf\{F(U) \mid \forall U \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)\}.$$

一般而言, 定理 1 中的极限过程至少目前还是不可操作的, 因为序列 U_n 不易构造且 $H^s(E)/[H^s(E \cap U)]$ 亦不易计算而计算它是必需的. 下面以 Sierpinski 垫片为例建立约化模型: 一个一元函数.

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上取单位正三角形 $\triangle ABC$, 记作 S_0 . 联接 S_0 的 3 边的中点, 得到边长为 $1/2$ 的 4 个正三角形, 去掉中间 1 个的内部, 得到的集合记作 S_1 . 对 S_1 的每个三角形重复上述过程, 得到集合 S_2 . 无限重复上述过程, 得到 $S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$

$$\text{非空集合 } S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$



称作 Sierpinski 垫片. 已知 $s = \dim_H(S) = \log_2 3$. 易见 $S_n (n \geq 0)$ 由 3^n 个边长为 $1/2^n$ 的正三角形组成, 它们称作 S_n 的基本三角形, 记作 $\triangle_n$. 显然在 $\triangle_n$ 上可以生成一个与 S 有相似比为 $1/2^n$ 的几何相似集合, 称作 $1/2^n$ -Sierpinski 垫片, 记作 $1/2^n$ - S . 据 Hausdorff 测度的齐次性质, 有 $H^s(1/2^n - S) = (1/3^n)H^s(S), \forall n \geq 0$

这里 $s = \dim_H(S) = \log_2 3$ (下同).

下面限制 S 的覆盖范围, 建立约化模型.

在 $S_0 = \triangle ABC$ 的 3 边上分别截取 $|AD_x| = |E_x B| = |BF_x| = |G_x C| = |CH_x| = |I_x A| = x, 0 \leq x \leq 1/2$, 得到正三角形 $\triangle AD_x I_x, \triangle BF_x E_x$ 和 $\triangle CH_x G_x$ 以及一个六边形 $U_{1-x} = D_x E_x F_x G_x H_x I_x$, 其中 $1-x$ 是它的直径 (如右). 易见

$$\{U_{1-x}; \triangle AD_x I_x, \triangle BF_x E_x, \triangle CH_x G_x\}$$

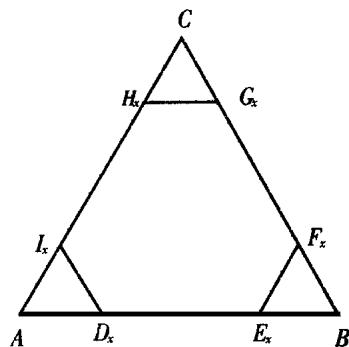
是 S 的一个覆盖. 记边长为 x 的三角形为 $\triangle_x$. 上述覆盖可以简写作 $\alpha_{1-x} = \{U_{1-x}; 3\triangle_x\}$, 由此得到约化模型

$$f(x) = \frac{H^s(S)}{H^s(S \cap U_{1-x})} \mid U_{1-x} \mid^s.$$

据文[2], $H^s(S \cap U_{1-x}) \leq \mid U_{1-x} \mid^s$, 因此总有 $H^s(S) \leq f(x), 0 \leq x \leq 1/2$

设 x_0 使 $f(x)$ 达到极小值, 即

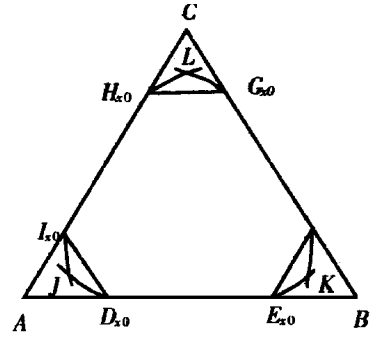
$$f(x_0) = \inf \left\{ \frac{H^s(S)}{H^s(S \cap U_{1-x})} \mid U_{1-x} \mid^s, 0 \leq x \leq 1/2 \right\} = \frac{H^s(S)}{H^s(S \cap U_{1-x_0})} \mid U_{1-x_0} \mid^s$$



令 CU_{1-x_0} 是包含 U_{1-x_0} 且与 U_{1-x_0} 有相同直径的最大凸集, 当 U_{1-x_0} 确定后, CU_{1-x_0} 是完全确定的, 因而 $H^s(S \cap CU_{1-x_0})$ 也是完全确定. 显然 $H^s(S \cap U_{1-x_0}) \leq H^s(S \cap CU_{1-x_0})$. 因此
$$\frac{H^s(S)}{H^s(S \cap CU_{1-x_0})} |CU_{1-x_0}|^s \leq f(x_0).$$

本文提出如下猜测.

$$\text{猜测 } H^s(S) = \frac{H^s(S)}{H^s(S \cap U_{1-x_0})} |U_{1-x_0}|^s$$



一般说来, 只要找到有正直径的凸集 U , 使得 $H^s(S \cap U_{1-x_0}) = |U|^s$ 且 $\frac{H^s(S)}{H^s(S \cap U)}$ 是可计算的, 则就可以得到 $H^s(S)$ 的准确值. 如果上述猜测成立, 为了得到这样的 U , 需要先求解 x_0 , 但这是非常困难的. 利用逐步搜索求解的方法得到 x_0 的一个较好近似值是 $1 - \frac{\pi}{3 \times 2^{15}}$, 由约化模型得到 $H^s(S) \leq 0.870\,078\,375$

这里 $s = \dim_H(S) = \log_2 3 \approx 1.584\,962\,501$. 这个结果改进了文[3]的结果. 再通过计算

$$\frac{H^s(S)}{H^s\left(S \cap U_{1-\frac{\pi}{3 \times 2^{15}}}\right)}, \text{ 得到}$$

$$H^s(S) \leq 0.849\,744\,142$$

这个结果还可以改进, 但将遇到大量计算. 这里需要更好的计算方法.

上述方法对满足开集条件的自相似集均适用. 文[2]实质上是利用这种方法否定了 Marion 关于 Koch 曲线的 Hausdorff 测度的猜测^[4].

参考文献:

- [1] FALCONER K. The geometry of fractal sets [A]. Cambridge tracks in mathematics; 85 [M]. London: Cambridge University Press, 1985. 1~999.
- [2] 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度—Koch 曲线 [J]. 中国科学 (A), 1998, 28 (2): 103.
- [3] 周作领. Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度 [J]. 中国科学 (A), 1997, 27 (6): 489.
- [4] MARION J. Mesures de Hausdorff D'ensembles fractals [J]. Ann Sci Math Quebec, 1987, 11 (1): 111~137.

Computation and Estimation of the Hausdorff Measure

*
ZHOU Zuo-ling, FENG Li

Abstract: In order to count the Hausdorff measure, a computation formula for the general fractals and a reduced one for the self-similar sets satisfying the open set condition are obtained. As an application, a better upper limit to the Hausdorff measure of the Sierpinski gasket is achieved.

Keywords: fractal; self-similar set; Hausdorff dimension and measure; Sierpinski gasket