

文章编号: 0529-6579(2000)01-0009-04

B_α 空间中加权 K -泛函与加权光滑模的等价性^{*}

张永虎

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 研究了 B_α 空间上的加权 K -泛函与加权光滑模之间的等价性, 为 B_α 空间上建立线性算子的加权逼近提供了有力的工具.

关键词: B_α 空间; 加权 K -泛函; 加权光滑模

中图分类号: O174.41 **文献标识码:** A

B_α 空间的概念是我国著名学者丁夏畦先生在讨论 Laplace 算子在某些典型区域上的先验估计^[1], 研究 Orlicz-Sobolev 空间嵌入定理及多维奇异积分与调和函数^[2] 等问题时引入的. 陈广荣等^[3] 讨论了 B_α 空间上算子的内插性质. 此外, 盛保怀等^[4~7] 研究了 B_α 空间的一些性质及其上某些算子的逼近问题, 但它们是在通常的光滑模和 K -泛函的意义下进行讨论的. 本文引进加权光滑模与加权 K -泛函, 并建立了它们之间的等价关系. 这对于 B_α 空间的逼近研究有深刻意义.

1 加权光滑模与加权 K -泛函 及主要结果

引入 B_α 空间上加权光滑模, 定义 $\omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha} = \sup_{0 < h \leq t} \|\Delta_h^r f\|_{B_\alpha}$ 为加权光滑模, 其中 $t > 0$, $\varphi(x)$ 为文[8] 中所述的权函数, 且

$$\Delta_h^r f(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f(x + (r/2 - k)h\varphi(x)), & x \pm (r/2)h\varphi \in [a, b] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

引入 $B_\alpha[a, b]$ 空间的 Sobolev 空间.

$$U_B = \{g \in B_\alpha[a, b] : g^{(r-1)} \in A.C_{loc}, \varphi g^{(r)} \in B_\alpha[a, b]\}$$

则称 $K_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha} = \inf_{g \in U_B} \{\|f - g\|_{B_\alpha} + t \|\varphi g^{(r)}\|_{B_\alpha}\}$

为加权 K -泛函. 为了方便, 文中 M, C 是每一步都不一定相同的常数.

定理 设 $f(x) \in B_\alpha[a, b]$, 对非负实数列 $\{a_m\}_{m=1}^\infty$, 设 $\{a_m^{1/m}\}$, $\{a_m^{-1/m}\} \in l^\infty$, 且 $s = \inf_{m \geq 1} \{a_m^{1/m}\}$, $q = \sup_{m \geq 1} \{a_m^{1/m}\}$, 则对 $r \in \mathbb{N}$, 存在 $M > 0$ 有

$$M^{-1} \omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha} \leq K_\varphi^r(f, t')_{B_\alpha} \leq M \omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha} \quad (1)$$

* 收稿日期: 1999-03-03 作者简介: 张永虎(1972 ~), 男, 博士生.

2 定理的证明

定理的证明可限定在 $[0, 1]$ 上进行, 因为对 $[a, b]$ 而言, 总可以通过 $y = (b-a)x + a$ 及逆变换 $y = (x-a)/(b-a)$ 将 $[0, 1]$ 与 $[a, b]$ 互化. 由文[3, 8] 及 B_α 空间的定义容易得到,

引理 1 在定理的条件下, 对 $\forall f \in B_\alpha [0, 1]$ 有

$$\|f\|_{p_m} \leq \|f\|_{B_\alpha} / s, \quad \omega_\varphi^r(f, t)_{p_m} \leq \omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha} / s$$

引理 2 在定理的条件下, 如果对 $\forall f \in B_\alpha [0, 1]$ 有 $\|f\|_{p_m} \leq A$, 则 $\|f\|_{B_\alpha} \leq 2qA$.

引理 3^[8] 设 φ, φ_1 满足文[8] 权函数的条件, 对 $x \in (\xi_1, \xi_2)$, $0 < A_1^{-1} \varphi(x) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi(x)$, 则对 $t > 0$ 有

$$\int_{t_0}^t \int_{\xi_1}^{\xi_2} |\Delta_{\varphi_1}^r f(x)|^p dx d\tau \leq A_1 \int_{t_0}^t \int_{\xi_1}^{\xi_2} |\Delta_{\varphi}^r f(x)|^p dx d\tau$$

$$\int_{t_0}^t \int_{\xi_1}^{\xi_2} |\Delta_{\varphi_1}^r f(x)|^p dx d\tau \leq A_1 \int_{t_0}^t \int_{\xi_1}^{\xi_2} |\Delta_{\varphi}^r f(x)|^p dx d\tau$$

成立, 这里 Δ 表示向前差分或向后差分, $A_1 > 1$ 为常数.

限于篇幅, 本文只给出加权 K -泛函的上界估计进行证明, 加权 K -泛函的下界估计的证明是容易的. 由加权 K -泛函定义, 只须构造出这样一个 $g \in U_B$, 使得对 $f \in B_\alpha [0, 1]$ 有

$$(a) \quad \|f - g\|_{B_\alpha} \leq M \omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha}$$

$$(b) \quad \|f \varphi^{(r)}\|_{B_\alpha} \leq M \omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha}$$

成立即可. 令 $t_k = \begin{cases} (1/2) 4^{-k}, & k \geq 0, \\ 1, & k < 0. \end{cases}$, 则 t_k 单调递减且 $0 < t_k \leq 1$. 对 $x \in [0, 1]$, 再设

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi(2^k 4^k x), & k \geq 0, \\ 1, & k < 0. \end{cases} \quad \text{其中, } \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ 0, & x \geq 3; \end{cases} \quad \|\psi\| \leq 1, \quad \psi \in C^\infty(\mathbf{R})$$

且 ψ 为递减函数. 选取 $t^* = (rA)^{1/(1-\beta)} t^{1/(1-\beta)}$, 使 $0 < h \leq t$, t 充分小及 $x \geq t^*$ 时, 有 $x - (r/2)h\varphi(x) \geq x/2$ 对任意的 $C \geq 1$, 选取 $N = 12C + r$ 和 $L = \left(\frac{A_1}{8^\beta r A}\right)^{1/(1-\beta)}$, L 满足条件: 当 $x \geq Lt^*/8$ 时, 有 $Lt^*/\varphi(x) \leq t$. 由文[8] 可知: 对 $\beta(0) = \beta$, $0 < x < 1$ 有 $A_1 x^\beta \leq \varphi(x) \leq A x^\beta$. 其中 A, A_1 为正常数, 定义 $l \triangleq l(t^*) = \max\{k: t_k \geq Ct^*\}$ 和

$$f_\tau(x) = r^r \int_0^{\tau/r} \dots \int_0^{\tau/r} \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \binom{r}{j} f(x + j\tau(u_1 + \dots + u_r)) du_1 \dots du_r$$

对充分小的 C , 令 $F_{t_k} = \frac{2}{t} \int_{t/2}^t f_{\tau C \varphi(t_k)}(x) d\tau$, C 满足 $C \varphi(t_k) < \inf\{\varphi(x): t_{k+1} \leq x \leq t_{k-3}\}$

$$\frac{1}{2} t C \varphi(x) \leq t_k \quad (\text{当 } k \leq l \text{ 时}) \quad (2)$$

由 l 的定义知式 (2) 是可能的. 再定义

$$g_l = \sum_{k=-\infty}^l \psi_{k-1} (1 - \psi_k) F_{t_k}(x) + \psi \frac{2}{Lt} \int_{Lt^*/2}^{Lt^*} \tilde{f}_\nu(x) d\nu \quad (3)$$

$$\text{其中, } \tilde{f}_\nu(x) = (2r)^r \int_0^{\nu/(2r)} \dots \int_0^{\nu/(2r)} \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} f(x + j\nu(u_1 + \dots + u_r)) du_1 \dots du_r \quad (4)$$

显然 $g_l \in U_B$, 下面只对 g_l 证明不等式 (a), (b) 成立.

$$\|f - g_t\|_{B_\alpha} \leq \|f - g_t\|_{B_\alpha[3t_l, t]} + \|f - g_t\|_{B_\alpha[0, t]} + \|f - g_t\|_{B_\alpha[t_l, 3t_l]} \triangleq \\ \|f - g_{t_1}\|_{B_\alpha} + \|f - g_{t_2}\|_{B_\alpha} + \|f - g_{t_3}\|_{B_\alpha}$$

只须证明对 g_{t_1} , g_{t_2} , g_{t_3} 仍有不等式 (a)、(b) 成立即可. 但这里只详细给出对 g_{t_1} 的情形, 而对 g_{t_2} , g_{t_3} 是其特殊情形或其证明过程稍作改动.

$$I_k = \int_{t_k}^{t_{k-2}} |f(x) - F_{t_k}(x)|^{p_m} dx = \\ \int_{t_k}^{t_{k-2}} \left| \frac{2}{t} \int_{t/2}^t \int_0^r \dots \int_0^{1/r} \Delta_{C^\varphi(t_k)}^r f(x) du_1 \dots du_r d\tau \right|^{p_m} dx$$

令 $u = u_1 + \dots + u_r$, 对任何 u , $0 \leq u \leq 1$, $\{u = u_1 + \dots + u_r\} \cap \{0 \leq u_i \leq 1/r, 1 \leq i \leq r\}$ 的 $r-1$ 维体积是有界的, 所以存在常数 $B_r > 0$, 使得

$$I_k \leq B_r \int_{t_k}^{t_{k-2}} \frac{2}{t} \int_{t/2}^t \int_0^1 |\Delta_{C^\varphi(t_k)}^r f(x)|^{p_m} du d\tau dx \leq \\ 2B_r \int_{t_k}^{t_{k-2}} \frac{1}{t} \int_0^1 \left| \Delta_{C^\varphi(t_k)}^r f\left(x + \frac{\tau}{2} Cw^\varphi(t_k)\right) \right|^{p_m} dw dx$$

交换积分次序, 并注意到不等式(2)中 C 的选取意味着 $\frac{\tau}{2} Cw^\varphi(t_k) \leq t_k$, 其中 $0 \leq w \leq t$, $k \leq 1$, 扩大 x 的积分域, 弃去 $\frac{\tau}{2} Cw^\varphi(t_k)$ 项, 应用引理 3 得

$$I_k \leq M \frac{1}{t} \int_0^t \int_{t_k}^{t_{k-3}} |\Delta_{C^\varphi(x)}^r f(x)|^{p_m} dx d\tau \quad (5)$$

因为对每个 $x \in [0, 1]$, 乘积 $\psi_{k-1}(x)(1 - \psi_k(x))$ 至多在 2 个 k 值下不为零, 而且它满足 $0 \leq \psi_{k-1}(x)(1 - \psi_k(x)) \leq 1$ 和 $\sum_{k=-\infty}^1 \psi_{k-1}(x)(1 - \psi_k(x)) + \psi_1(x) = 1$, 又由于只有当 $x \in [t_k, 3t_{k-1}]$ 时, $\psi_{k-1}(x)(1 - \psi_k(x))$ 才可能非零, 所以

$$\|f - g_{t_1}\|_{p_m}^{p_m} \leq 2^{p_m} \sum_{k=-\infty}^1 \int_0^1 (\psi_{k-1}(x)(1 - \psi_k(x)))^{p_m} |f(x) - F_{t_k}(x)|^{p_m} dx \leq \\ 2^{p_m} \sum_{k=-\infty}^1 I_k \leq 6 \cdot 2^{p_m} M \{\omega_\varphi^r(f, t)_{p_m}\}^{p_m} \leq M^{p_m} \{\omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha}\}^{p_m}$$

又由引理 2 得到, $\|f - g_{t_1}\|_{B_\alpha} \leq \omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha}$. 下证对 g_{t_1} 也有结论 (b) 成立. 由 $f_\tau(x)$ 的定义知

$$\frac{d^r}{dx^r} f_\tau(x) = r! \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \binom{r}{j} (j\tau)^{-r} \Delta_{\tau/r}^r f(x)$$

因此 $\int_{t_k}^{t_{k-2}} \left| \frac{d^r}{dx^r} F_{t_k}(x) \right|^{p_m} dx \leq C t^{-\eta_m} (\varphi(x))^{-\eta_m} \sum_{j=1}^r \frac{2}{t} \int_{t/2}^t \int_{t_k}^{t_{k-2}} |\Delta_{C^\varphi(t_k)/r}^r f(x)|^{p_m} dx d\tau$

因为 $jC\tau^\varphi(t_k) \leq C^\varphi(t_k) \leq t_{k-1}$ (当 $k \leq 1$), 利用引理 3, 此处 $\varphi_1(x) = jC^\varphi(t_k)/r$, 则当 $x \in [t_k, t_{k-3}]$ 时, 有 $C^{-1}\varphi(x) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi(x)$, 因此

$$\int_{t_k}^{t_{k-2}} \left| \frac{d^r}{dx^r} F_{t_k}(x) \right|^{p_m} dx \leq C t^{-\eta_m} (\varphi(x))^{-\eta_m} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{t_k}^{t_{k-3}} |\Delta_{C^\varphi(x)}^r f(x)|^{p_m} dx d\tau \quad (6)$$

又因为 g_{t_1} 中至多有 2 项不为零, 所以 $g_{t_1}^{(r)} = F_{t_k}^{(r)} + \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \psi_k^{(j)}(F_{t_{k+1}} - F_{t_k})^{(r-j)} \quad (x \in [t_k, t_{k-1}])$, 由导数间插值不等式及 $|\psi_k^{(j)}(x)| \leq M 4^{kj}$, 有

$$t^{\eta_m} \int_{t_k}^{t_{k-1}} |\varphi^r(x) g_{t_1}^{(r)}(x)|^{p_m} dx \leq M t^{\eta_m} (\varphi(t_k))^{\eta_m} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k-1}} |F_{t_k}^{(r)}(x)|^{p_m} dx + \right.$$

$$\left. \sum_{j=0}^{r-1} 4^{kj} p_m 4^{k(r-j)p_m} \int_{t_k}^{t_{k-1}} |F_{t_{k+1}}(x) - F_{t_k}(x)|^{p_m} dx + \right.$$

$$\sum_{j=0}^r 4^{kj} p_m 4^{-k} p_m \int_{t_k^{j-1}}^{t_k^j} [|F_{t_{k+1}}^{(r)}(x)|^{p_m} + |F_{t_k}^{(r)}(x)|^{p_m}] dx \Big\}$$

由式 (5), 得 $\int_{t_k^{j-1}}^{t_k^j} |F_{t_{k+1}}(x) - F_{t_k}(x)|^{p_m} dx \leq$

$$2^{p_m} \left\{ \int_{t_k^{j-1}}^{t_k^j} [|f(x) - F_{t_{k+1}}(x)|^{p_m} + |f(x) - F_{t_k}(x)|^{p_m}] dx \right\} \leq$$

$$M \frac{1}{t} \int_0^t \int_{t_k^{j-4}}^{t_k^{j-1}} |\Delta_{\varphi(x)}^r f(x)|^{p_m} dx d\tau$$

结合不等式 (6), 得到

$$t^{p_m} \int_{t_k^{j-1}}^{t_k^j} |\varphi^r(x) g_{t_1}^{(r)}(x)|^{p_m} dx \leq M [1 + (4^k t^\varphi(t_k))^{p_m}] \frac{1}{t} \int_0^t \int_{t_k^{j-4}}^{t_k^{j-1}} |\Delta_{\varphi(x)}^r f(x)|^{p_m}$$

$dx d\tau$

由于对 $0 \leq t \leq 1$, $4^k t^\varphi(t_k)$ 一致有界, $k=0, \pm 1, \dots$, 所以

$$t^{p_m} \int_{t_k^{j-1}}^{t_k^j} |\varphi^r(x) g_{t_1}^{(r)}(x)|^{p_m} dx \leq M \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^1 |\Delta_{\varphi(x)}^r f(x)|^{p_m} dx d\tau \leq M^{p_m} \{ \omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha} \}^{p_m}$$

再利用引理 2 得到 $t^r \|\varphi^r g_{t_1}^{(r)}\|_{B_\alpha} \leq M \omega_\varphi^r(f, t)_{B_\alpha}$. 从而结论 (a), (b) 得到了证明.

参考文献:

- [1] DING X Q, LUO P Z. B_α spaces and some estimates of Laplace operator[J]. 系统科学与数学, 1981, 1(1): 9 ~ 33.
- [2] 丁夏畦. 多维奇异积分与调和函数[J]. 数学杂志, 1984, 4(3): 240 ~ 245.
- [3] CHENG G R, MENG B Q. Interpolation of B_α spaces[J]. 数学物理学报, 1988, 8(1): 65 ~ 70.
- [4] 庄亚栋, 俞鑫泰. B_α 空间的一些性质[J]. 数学物理学报, 1989, 9(4): 407 ~ 413.
- [5] 尚增科. 关于 B_α 空间的性质[J]. 宝鸡师范学院学报(自然科学版), 1991(1): 65 ~ 68.
- [6] 盛保怀. B_α 空间中的算子逼近[J]. 数学物理学报, 1991, 11(4): 387 ~ 395.
- [7] 吴嘎日迪. B_α 空间中的多项式逼近[J]. 北京师范大学学报, 1996, 32(2): 180 ~ 183.
- [8] DITZIAN Z, TOTIC V. Moduli of smoothness[M]. Berlin/ New York: Springer Verlag, 1987. 7 ~ 23.

Equivalence Relation Between the Weighted K -functional and the Weighted Smoothness Moduli in B_α Spaces

ZHANG Yong-hu^{*}

Abstract: This paper mainly studies the equivalence relation between the weighted K -functional and the weighted smoothness moduli by means of construction in B_α spaces. It provides a strong tool to set up the weighted approximation of linear operator in B_α spaces.

Keywords: B_α spaces; weighted K -functional; weighted smoothness moduli

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China