

文章编号: 0529-6579 (1999) 06-0110-03

一类分形的构造

罗 俊¹, 帅哲明²

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广州 510275; 2. 中国建设银行南昌市分行)

摘 要: 令 $f(x) = 1$, 并对 $0 < a < 1/2, k \geq 1$ 定义 $f_{a,k}(x) = 1 - 2^{-k+1} + a^k x$, 则存在 $\mathbf{R}$ 中唯一的非空紧子集 E_a 满足 $E_a = f(E_a) \cup (\bigcup_{k \geq 1} f_{a,k}(E_a))$. 记 $E_{a,n}$ 为 $\{f_{a,k}: k \leq n\}$ 的吸引子, 则 $E_{a,n}$ 的 Hausdorff 维数收敛到 E_a 的 Hausdorff 维数 $= -\ln 2 / \ln a$ 且 E_a 不是自相似集.

关键词: Hausdorff 维数; 吸引子; 自相似集

中图分类号: O 189.1 **文献标识码:** A

在分形几何的研究中, 估计分形的 Hausdorff 维数具有重要意义. 尽管满足开集条件的自相似集的 Hausdorff 维数问题已经解决^[1], 然而, 一般分形的 Hausdorff 维数总是难以计算. 例如, 设 X 为 $\mathbf{R}^n$ 上的紧子集, $K_j (j \geq 1)$ 为 X 中满足开集条件的自相似集, 如果在 Hausdorff 维数度量下 K_j 收敛到 K , 则 K_j 的 Hausdorff 维数是否收敛到 K 的 Hausdorff 维数? 这就是 Hausdorff 维数在极限运算下的封闭性问题. 目前尚未解决且有待于进一步探讨. 为此, 本文构造一类肯定的例子, 期望有助于找 Hausdorff 维数在极限运算下封闭的条件. 设 $0 < a < 1/2$, 对 $k \geq 1$ 定义 $f_{a,k}(x) = 1 - 2^{-k+1} + a^k x, f(x) = 1$, 下文致力于证明: 存在 $\mathbf{R}$ 中唯一的非空紧子集 E_a 满足 $E_a = f(E_a) \cup (\bigcup_{k \geq 1} f_{a,k}(E_a))$; 并且, 若 $E_{a,n}$ 为 $\{f_{a,k}: k \leq n\}$ 的吸引子, 则 $E_{a,n}$ 在 Hausdorff 维数度量下收敛到 E_a , $E_{a,n}$ 的 Hausdorff 维数收敛到 E_a 的 Hausdorff 维数且 E_a 的 Hausdorff 维数 $\dim_H E_a = -\ln 2 / \ln a$. 此外, 还验证了每个 E_a 均不是自相似集.

1 基本概念

本文中 Hausdorff 测度和维数等定义与记号参考文 [2], 为完整起见, 下面加以简略介绍. 设 $\mathbf{R}^m$ 为 m 维欧氏空间, $x, y \in \mathbf{R}^m, A \subset \mathbf{R}^m$, 用 $|x - y|$ 表示 x 与 y 间的欧氏距离, 用 $|A| = \sup\{|x - y|: x, y \in A\}$ 表示集合 A 的直径. 设 $F \subset \mathbf{R}^m$, 如果 $\{U_i\}$ 为可数或有限个直径不大于 δ 的集合且 $F \subset \bigcup U_i$, 则 $\{U_i\}$ 称作 F 的一个 δ 覆盖. 对任意非负数 s 与任意 $\delta > 0$, 令 $H_\delta^s(F) = \inf\{\sum |U_i|^s: \{U_i\} \text{ 为 } F \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖}\}$, 令 $H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$, 则 $H_\delta^s(F)$ 称作 F 的 s 维 Hausdorff 测度. 可以验证, $H^s(F)$ 是 F 上的一个测度. 令 $\dim_H F = \inf\{s: H^s(F) = 0\} = \sup\{s: H^s(F) = \infty\}$, 则 $\dim_H F$ 称作 F 的 Hausdorff 维数. 若 $s = \dim_H F$ 且

* 基金项目: 国家教育部博士点 (9555819) 资助项目; 广东省自然科学基金 (960014) 资助项目

收稿日期: 1999-01-15 作者简介: 罗俊, 男, 1972 年生, 博士

$0 < H^s(F) < \infty$, 则 F 称作 s -集. 不难验证, Hausdorff 维数满足单调性及可数稳定性^[3].

设 $S: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$, 若存在正常数 $c < 1$ 使 $|S(x) - S(y)| \leq c |x - y|$, $x, y \in \mathbf{R}^m$, 则 S 称作 $\mathbf{R}^m$ 上的压缩映射. 若上式换成 $|S(x) - S(y)| = c |x - y|$, 则 S 称作 $\mathbf{R}^m$ 上的相似压缩, c 称作 S 的相似比. $\mathbf{R}^m$ 上的一个迭代函数系统是指一族压缩映射 $\{S_1, \dots, S_n\}$ ($n > 1$), 其吸引子是指 $\mathbf{R}^m$ 中唯一的非空紧子集 E 满足 $E = \bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i(E)$. 若 $S_1, \dots, S_n$ 均为相似压缩, 则 $\{S_1, \dots, S_n\}$ 的吸引子称作自相似集.

引理 1^[1] 设 $\mathbf{R}^m$ 上迭代函数系统 $\{S_1, \dots, S_n\}$ 由相似压缩组成, c_i 是 S_i 的相似比. 若存在 $\mathbf{R}^m$ 中非空开子集 V 满足 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i(V) \subset V$ 和 $S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq n$, 则吸引子 E 的 Hausdorff 维数 $\dim_H E$ 是满足 $\sum_{1 \leq i \leq n} c_i^s = 1$ 的唯一正数.

2 集合族 E_a 的定义

设 $0 < a < 1/2$, 映射 $f_{a,k}$ 和 f 定义如上, 则 $f_{a,k}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 上以 a^k 为相似比的相似压缩, 并且, $-\ln 2 / \ln a$ 是满足 $\sum_{k \geq 1} a^{ks} = 1$ 的唯一正数. 对 $\mathbf{R}^m$ 中任意非空紧子集 A , 定义 $\Psi_a(A) = f(A) \cup (\bigcup_{k \geq 1} f_{a,k}(A))$. 记 $K_{a,1} = \Psi_a([0, 1])$, 对 $i > 1$ 令 $K_{a,i} = \Psi_a(K_{a,i-1})$, 则 $\{K_{a,i}\}$ 是 $[0, 1]$ 中单调下降的非空紧子集序列. 记 $E_a = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_{a,i}$, 则 E_a 是 $[0, 1]$ 中非空紧子集, $1 \in E_a$ 且 $\Psi_a(E_a) \subset E_a$.

引理 2 若 A 为 $[0, 1]$ 中的非空紧子集, 则 $\Psi_a(A)$ 亦然.

证明 设 ω 为 $\Psi_a(A)$ 的开覆盖, 选取 $V_0 \in \omega$ 使 $1 \in V_0$, 则存在 $N > 0$, 对任意 $k > N$ 均有 $f_{a,k}(A) \subset V_0$. 令 ω 的子族 $\{V_1, \dots, V_n\}$ 为 $[0, 1]$ 中紧子集 $\bigcup_{k \leq N} f_{a,k}(A)$ 的一个有限覆盖, 则 $\{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ 是 $\Psi_a(A)$ 的有限开覆盖, 故 $\Psi_a(A)$ 是 $[0, 1]$ 中紧子集.

引理 3 $\Psi_a(E_a) = E_a$.

证明 任取 $x \in E_a$, 可以验证, 任意 $i \geq 1$, $x \in K_{a,i}$ 且 $\Psi_a(\{x\}) \subset K_{a,i+1}$, 故 $\Psi_a(E_a) \subset E_a$. 又 $E_a = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_{a,i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Psi_a(K_{a,i}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} [\{1\} \cup \bigcup_{j \geq 1} f_{a,j}(K_{a,i})]$ 且 $f_{a,k}([0, 1]) \cap f_{a,j}([0, 1]) = \emptyset$, $1 \leq j < k$. 因此, 任意 $y \in E_a$, 若 $y \neq 1$, 则存在 $J \geq 1$ 使得 $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} f_{a,J}(K_{a,i}) = f_{a,J}(\bigcap_{i=1}^{\infty} K_{a,i}) = f_{a,J}(E_a)$, 即 $y \in \Psi_a(E_a)$, 故 $\Psi_a(E_a) = E_a$.

定理 1 E_a 是 $\mathbf{R}$ 中唯一的非空紧子集满足 $(E_a) = \Psi_a(E_a)$.

证明 设 $\mathbf{R}$ 中非空紧子集 A 满足 $A = \Psi_a(A)$, 首先验证 $A \subset E_a$. 设 d 和 b 分别是 A 的下确界和上确界. 若 $d < 0$, 则 $d < 1 = f(d)$ 且每个 $k \geq 1$ 均有 $d < 1 - 2^{-k+1} + a^k d$, 故 $d \notin \Psi_a(A)$, 矛盾. 若 $b > 1$, 则 $f(b) = 1 < b$ 且每个 $k \geq 1$ 均有 $1 - 2^{-k+1} + a^k b < 1 - a^k + a^k b < b$, 故 $b \notin \Psi_a(A)$, 矛盾. 综上所述, 必有 $A \subset [d, b] \subset [0, 1]$, 故 $A \subset E_a$.

以下验证 $A = E_a$. 不然, 存在 $x \in E_a$ 和 $\epsilon > 0$, 使 $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A = \emptyset$. 设正整数 N 使得 $a^N < \epsilon$, 则任意 $\{k(1), \dots, k(N)\}$ 均有 $|f_{a,k(1)} \circ \dots \circ f_{a,k(N)}([0, 1])| < \epsilon$. 记 $X_0 = \{1\}$, 令 $X_i = \Psi_a(X_{i-1})$, $i > 0$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X \subset A$. 选取有限序列 $\{k(1), \dots, k(N)\}$ 使 $x \in f_{a,k(1)} \circ \dots \circ f_{a,k(N)}([0, 1])$, 此时存在 $y = f_{a,k(1)} \circ \dots \circ f_{a,k(N)} \in X$ 使得 $|x - y| < \epsilon$, 与 $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A = \emptyset$ 矛盾.

3 E_a 的 Hausdorff 维数

对 $0 < a < 1/2$, 记 $\dim_H E_{a,n}$ ($n > 1$) 为 $E_{a,n}$ 的 Hausdorff 维数, $\dim_H E_a$ 为 E_a 的 Haus-

dorff 维数. 由引理 1, 单调上升序列 $\dim_{\text{H}} E_{a,n}$ 收敛到 $-\ln 2 / \ln a$. 由 $E_{a,n} \subset E_a$ 和 Hausdorff 维数的单调性, $\dim_{\text{H}} E_{a,n} \leq \dim_{\text{H}} E_a$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \dim_{\text{H}} E_{a,n} = -\ln 2 / \ln a \leq \dim_{\text{H}} E_a$.

定理 2 设 $0 < a < 1/2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \dim_{\text{H}} E_{a,n} = \dim_{\text{H}} E_a$, 故 $\dim_{\text{H}} E_{a,n} = -\ln 2 / \ln a$.

证明 若 $\dim_{\text{H}} E_a > -\ln 2 / \ln a$, 任取 $s \in (-\ln 2 / \ln a, \dim_{\text{H}} E_a)$, 则 $\sum_{k \geq 1} a^{ks} = c < 1$. 设 X 如定理 1 证明中所定义, 则 $\dim_{\text{H}} X = 0$ 且 X 的 s 维 Hausdorff 维数 $H^s(X) = 0$. 以下验证 $H^s(E_a - X) = 0$, 从而 $\dim_{\text{H}} E_a = \dim_{\text{H}}(E_a - X) \leq s < \dim_{\text{H}} E_a$, 矛盾.

记 $\Omega_0 = \{[0, 1]\}$, 则 Ω_0 是 $E_a - X$ 的覆盖且 $\sum |u|^s = 1$, 其中, u 取遍 Ω_0 中元素, 一般地, 令 $\Omega_i = \{f_{a,k(U)} : k \geq 1, U \in \Omega_{i-1}\}$, $i \geq 1$, 则 Ω_i 是 $E_a - X$ 的覆盖且 Ω_i 中元素的直径均不大于 a^i . 容易验证, 当 V 取遍 Ω_i 中元素时, $\sum |V|^s \leq c^i$. 由 $0 < a < 1/2$ 和 $0 < c < 1$, $H^s(E_a - X) = 0$, 矛盾.

定理 3 任意 $a \in (0, 1/2)$, E_a 不是自相似集.

证明 不然, 假设迭代函数系统 $\{S_1, \dots, S_n\}$ 由 $\mathbf{R}$ 上的相似压缩组成且 E_a 是它的吸引子, 则 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i([0, 1]) \subset [0, 1]$. 任意 $k \geq 1$, 令 $I_k = (1 - 2^{-k+1} + a^k, 1 - 2^{-k})$, 则每个 I_k 与 E_a 均不相交. 设 $T \in \{S_1, \dots, S_n\}$, 则或者 $T(E_a) \subset f_{a,1}(E_a)$ 或者 $T(E_a) \subset [1/2, 1]$. 令 $\Phi_1 = \{S_i : 1 \leq i \leq n, S_i(E_a) \subset [1/2, 1]\}$, 则 Φ_1 中元素个数不多于 $n-1$ 且任意 $T \in \Phi_1$ 或者 $T(E_a) \subset f_{a,2}(E_a)$ 或者 $T(E_a) \subset [1-1/4, 1]$. 令 $\Phi_2 = \{S \in \Phi_1 : S(E_a) \subset [1-1/4, 1]\}$, 则 Φ_2 中元素个数不多于 $n-2$, 并且任意 $T \in \Phi_2$, 或者 $T(E_a) \subset f_{a,3}(E_a)$ 或者 $T(E_a) \subset [1-2^{-3}, 1]$. 逐步类推, 令 $\Phi_{n-1} = \{S \in \Phi_{n-2} : S(E_a) \subset [1-2^{-n+1}, 1]\}$, 则 Φ_{n-1} 中元素个数不多于 1, 并且任意 $T \in \Phi_{n-1}$ 或者 $T(E_a) \subset f_{a,n}(E_a)$ 或者 $T(E_a) \subset [1-2^{-n}, 1]$. 因此 $\bigcup_{1 \leq i \leq n} S_i(E_a)$ 是 E_a 真子集, 与反证假设矛盾.

参考文献:

- [1] FALCONER K. The geometry of fractal sets [M]. London: Cambridge University Press, 1985. 118~125.
- [2] FALCONER K. Fractal geometry: mathematical foundations and application [M]. Chichester: John Wiley, 1990. 25~35.

The Construction of a Class of Fractals

LUO Jun^{*}, SHUAI Zhe-ming

Abstract: Let $f(x) = 1$, and $f_{a,k}(x) = 1 - 2^{-k+1} + a^k x$ for $0 < a < 1/2, k \geq 1$, then there exists a unique nonvoid compact set E_a with $E_a = f(E_a) \cup (\bigcup_{k \geq 1} f_{a,k}(E_a))$. Denoted by $E_{a,n}$ the attractor of $\{f_{a,k} : k \leq n\}$, the Hausdorff dimension of $E_{a,n}$ converge to that of E_a ; moreover, the Hausdorff dimension of E_a is $-\ln 2 / \ln a$ and each E_a is not self-similar.

Keywords: Hausdorff dimension; attractor; self-similar set

^{*} Department of Scientific Computing and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou 510275.