

文章编号: 0529-6579 (1999) 05-0017-05

椭圆型微分方程振动性的函数序列方法^{*}

徐志庭¹, 李远清²

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广州 510275; 2. 华南理工大学自动化系)

摘 要: 在 $\mathbf{R}^n$ 的一个外区域 Ω 上考虑二阶非线性椭圆型微分方程 $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[A_{ij}(x, y) \right] \frac{\partial}{\partial x_j} y + p(x)f(y) = 0$ 解的振动性质 (其中 $n \geq 2$, $p(x)$ 可变号). 借助于函数序列方法并利用基本不等式技巧, 得到了保证此方程一切解均振动的充分条件.

关键词: 二阶非线性椭圆型微分方程; 振动; “弱积分小” 系数; 函数序列

中图分类号: O 175.28 **文献标识码:** A

对于具有“积分小”系数的二阶常微分方程解的振动性质的研究, 已有相当丰富和出色的成果^[1~4]. 最近, 文 [5] 通过引入“弱积分小”因子, 得到了具有“弱积分小”系数的二阶非线性椭圆型微分方程

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[A_{ij}(x, y) \right] \frac{\partial}{\partial x_j} y + p(x)f(y) = 0 \quad (1)$$

一切解均振动的充分条件, 在很大程度上, 推广和改进了文 [1~4] 的部分结果. 本文的目的是构造比文 [5] 更为简洁且易于检验的函数序列, 并利用基本不等式技巧, 研究方程 (1) 在 $\mathbf{R}^n$ 的一个外区域上的振动性质, 获得了保证方程 (1) 的一切解均振动的充分条件, 改进和发展了文 [1~5] 的主要结果.

1 假设与引理

为简便起见, 若无特别声明, 本文所用符号与术语主要参见文献 [5, 6].

在 $\mathbf{R}^n$ 的一个包含 Ω_a 的外区域 Ω 上考虑方程 (1), 总体假设

① $p(x) \in C_{bc}^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$;

② $f(y) \in C(\mathbf{R}) \cup C'(\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^-)$, $yf(y) > 0$, 对 $y \neq 0$;

③ $A(x, y) = (A_{ij}(x, y))_{n \times n}$ 是 $\Omega \times \mathbf{R}$ 上的实对称正定矩阵 (椭圆型条件), 且 $A_{ij}(x, y) \in C_{loc}^{1+\alpha}(\Omega \times \mathbf{R})$, $\alpha \in (0, 1)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$;

④ 设 $\lambda_{\max}(x, y)$ 为矩阵 $A(x, y)$ 的最大特征值, 且存在函数 $\lambda \in C'[\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^+]$, $\alpha \in$

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目; 中山大学研究基金资助项目

收稿日期: 1998-12-04

作者简介: 徐志庭, 男, 1963 年生, 副教授, 在职博士生.

$C[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+]$, 使得 $\lambda(r, y) \geq \max_{|x| \leq r} \lambda_{\max}(x, y)$, 且 $\frac{f'(y)}{\lambda(r, y)} \geq \frac{\varepsilon}{a(r)}$, 对 $y \neq 0, r > 0, \varepsilon > 0$.

本文默认在条件①~④下, 方程(1)的解在外区域 Ω 存在^[6].

定义 1^[5] 方程(1)称为具有“弱积分小”系数, 如果存在函数 $\eta \in C^1[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+]$, 使得 1) $\int_b^\infty \frac{r^{1-\eta}}{\eta(r)a(r)} dr = \infty$; 2) $\int_{\Omega_b} \frac{a(|x|)}{\eta(|x|)} [\eta'(|x|)]^2 dx < \infty$; 3) $\int_{\Omega_r} \eta(|x|) p(x) dx$ 收敛, 对 $r \geq b$.

满足上述条件的函数 η 称为“弱积分小”因子. 特别地, 当 $\eta(r) \equiv 1$ 时, 方程(1)称为具有“积分小”系数^[1-4].

引理 1^[5] 假设方程(1)具有“弱积分小”系数, $y(x) \neq 0$ 是其非振动解, 则

$$\int_{\Omega_b} \frac{f'(y(x))}{\eta(|x|)} (W^* A^{-1} W)(x) dx < \infty \quad (2)$$

$$\left| \int_{\Omega_b} \frac{a(|x|)}{\eta(|x|)} [\eta'(|x|)]^2 dx \right| < \infty \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} W(x) \circ \gamma(x) ds = 0 \quad (4)$$

且

$$\int_{S_r} W(x) \circ \gamma(x) ds = \int_{\Omega_r} \eta(|x|) p(x) dx + \int_{\Omega_r} \frac{f'(y(x))}{\eta(|x|)} (W^* A^{-1} W)(x) dx - \int_{\Omega_r} \frac{\eta'(|x|)}{\eta(|x|)} W(x) \circ \gamma(x) dx \quad (5)$$

对充分大的 $r > b$ 成立, 其中, $W(x) = \frac{\eta(|x|)}{f(y(x))} (A^\nabla y)(x)$, W^* 表示 W 的转置, A^{-1} 表示 A 的逆矩阵, ∇y 表示 y 的梯度.

2 主要结果

全文假设方程(1)具有“弱积分小”系数, $\eta(r)$ 是“弱小积分”因子. 为简便起见, 引入下列记号: 对任意函数 $g(t)$ 定义: $g(t)_+ = [g(t)]_+ = \frac{1}{2} [g(t) + |g(t)|]$,

$$T(r) = \int_{S_r} W(x) \circ \gamma(x) ds, q(r) = \frac{\varepsilon r^{1-n}}{2\omega \eta(r)a(r)}, Q(r) = \int_b^r q(\tau) d\tau.$$

定义函数序列 $\{p_m(r)\}_{m=1}^\infty$ 如下:

$$\begin{aligned} p_0(r) &= \int_{\Omega_r} [\eta(|x|) p(x) - \frac{2a(|x|)}{\varepsilon \eta(|x|)} [\eta'(|x|)]^2] dx, \\ p_1(r) &= \int_r^\infty q(\tau) p_0^2(\tau) d\tau, \\ p_{m+1}(r) &= \int_r^\infty q(\tau) [p_0(\tau) + p_m \tau]^2 d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

不难看出, 序列(6)是单增的, 即

$$p_m(r) \leq p_{m+1}(r), m = 1, 2, \dots, \forall r \geq b \quad (7)$$

注 1 序列(6)比文[5]中所定义的函数序列更为简洁, 且易于验证.

定理 1 如果下列条件之一成立, 则方程(1)的一切解均振动. 1) $p_m(r), m = 1, 2, \dots$,

$k-1$ 被确定, 而 $p_k(r)$ 不存在, 其中 $k \geq 1$ 是正整数; 2) $\{p_m(r)\}_1^\infty$ 被确定, 但对于任意的 $X > b$, 有 $r^* \geq X$ 存在, 使 $p_m(r^*) \rightarrow \infty (m \rightarrow \infty)$.

证明 若 $y(x)$ 是方程(1)的一个非振动解, 不妨设对 $|x| > b$ 时, $y(x) \neq 0$, 由引理 1 知结论(5)成立. 依假设 ③, ④ 和 Cauchy 不等式, 知

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{f'(y(x))}{\eta(|x|)} (W^* A^{-1} W)(x) dx &\geq \int_r^\infty d\tau \int_{S_\tau} \frac{\varepsilon}{\eta(|x|) a(|x|)} |W(x)|^2 ds = \\ &\int_r^\infty \frac{\varepsilon}{\eta(\tau) a(\tau)} d\tau \int_{S_\tau} |W(x)|^2 ds \geq \\ &\int_r^\infty \frac{\varepsilon}{\eta(|\tau|) a(|\tau|)} \frac{\left[\int_{S_\tau} [W(x) \circ \gamma(x)]^2 ds \right]^2}{\int_{S_\tau} |r(x)|^2 ds} d\tau = \\ &\int_r^\infty \frac{\varepsilon \tau^{1-n}}{\omega \eta(\tau) a(\tau)} \int_{S_\tau} [W(x) \circ \gamma(x)]^2 d\tau \end{aligned}$$

从而, 由结论(5)知 $T(r) \geq \int_{\Omega} \eta(|x|) p(x) dx + 2 \int_r^\infty q(\tau) T^2(\tau) d\tau - \int_r^\infty \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} T(\tau) d\tau$

注意到 $2q(\tau) T^2(\tau) - \frac{\eta'^2(\tau)}{\eta(\tau)} T(\tau) \geq q(\tau) T^2(\tau) - \frac{2\omega q(\tau)}{\varepsilon \tau^{1-n} \eta(\tau)} [\eta'(\tau)]^2$

从而 $T(r) \geq \int_r^\infty \eta(|x|) p(x) - \frac{2a(|x|)}{\varepsilon \eta(|x|)} [\eta'(|x|)]^2 dx + \int_r^\infty q(\tau) T^2(\tau) d\tau$ (8)

首证 1), 先证 $k=1$ 时, 依引理 1, 有

$$\int_r^\infty q(\tau) T^2(\tau) d\tau < \infty \quad (9)$$

从而 $T(r) \geq p_0(r)$, $T^2(r) \geq p_0^2(r)$, 由上式知

$$p_1(r) = \int_r^\infty q(\tau) p_0^2(\tau) d\tau \leq \int_r^\infty q(\tau) T^2(\tau) d\tau < \infty \quad (10)$$

所以 $p_1(r)$ 被确定, 这与 1) 矛盾. 现设 $k > 1$, 利用(8) ~ (10) 式和数学归纳法, 可以证明

$p_m(r) \leq p_{m+1}(r) = \int_r^\infty q(\tau) [p_0(\tau) + p_m(\tau)]^2 d\tau \leq \int_r^\infty q(\tau) T^2(\tau) d\tau < \infty$. 再次证明与 1) 矛盾.

其次证 2). 如上讨论有 $p_m(r) \leq \int_r^\infty q(\tau) T^2(\tau) d\tau < \infty$.

因此, 对任何固定的 r , 有 $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(r) < \infty$, 这与 2) 相矛盾.

推论 1 如果下列条件之一满足, 则方程(1)的一切解均振动.

① $p_0(r) \geq \frac{k_0}{Q(r)}$; ② $\int_r^\infty q(\tau) p_0^2(\tau) d\tau \geq k_0 p_0(r)$, 其中 $k_0 > 1/4$, 常数.

证明 ① 与 ② 证明类似, 故仅证 ①. 注意到 $Q(r) \rightarrow \infty$, 当 $r \rightarrow \infty$ 由定义可以证得

$p_m(r) \geq \frac{k_0}{Q(r)}$, $k_m = (k_0 + k_{m-1})^2$, 其中 $k_1 = k_0^2$. 不难证明 $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = \infty$. 因而存在 r^* , 使得 $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(r^*) = \infty$. 则由定理 1 的 2) 知, 方程(1)的一切解均振动.

定理 2 如果 $p_m(r)$, $m = 1, 2, \dots, k$ 被确定 (k 为某正整数), 而且

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup \left[p_m(r) \exp \left\{ 4 \int_b^r q(\tau) p_0(\tau) d\tau \right\} \right] = \infty \quad (11)$$

则方程(1)的一切解均振动.

证明 假设 $|x| \geq b$ 时, 有 $y(x) \neq 0$, 由引理 1 知, $T(r) \geq p_0(r) + H(r)$.

其中, $H(r) = \int_r^\infty q(\tau) T^2(\tau) d\tau$.

因为 $-H'(r) = q(r)T^2(r) \geq 4q(r)[p_0(\tau)] + H(r)$,

所以 $H(r) \leq H(b) \exp \left\{ -4 \int_b^r q(\tau)[p_0(\tau)] + d\tau \right\}$.

另一方面, 类似于定理 1 的证明, 有 $H(r) \geq p_m(r)$, 故

$$p_m(r) \exp \left\{ 4 \int_b^r q(\tau)[p_0(\tau)] + d\tau \right\} \leq H(b)$$

与(11)式矛盾.

类似于定理 2 的证明, 可得

定理 3 如果 $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_b^r \exp \left\{ -4 \int_b^\theta q(\theta) p_0(\theta) d\theta \right\} d\tau < \infty$, 且存在 $m \geq 1$, 使

$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_b^r p_m(\tau) d\tau = \infty$, 则方程(1)的一切解均振动.

例 1 考虑具有 2 个自变元的二阶非线性椭圆型微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ry^2 \frac{\partial y}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\sqrt{x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2}}{4 + \sin x_1 x_2} \frac{\partial y}{\partial x_2} \right] + \frac{3(r \sin r - \cos r - 3)}{r} y^3 = 0 \quad (12)$$

其中, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $p(x) = \frac{3(r \sin r - \cos r - 3)}{r}$ 变号, $f(y) = y^3$.

不难得出 $\lambda(r, y) = ry^2$, $\frac{f'(y)}{\lambda(r, y)} = \frac{3}{r}$, 取 $a(r) = r$, $\eta(r) = \frac{1}{r^2}$, $\varepsilon = 3$, $\omega = 2\pi$.

可以验证推论 1 之②的条件满足, 则方程(12)的一切解均振动.

参考文献:

- [1] 燕居让. 具有一个“积分小”系数的二阶微分方程解的振动性质[J]. 数学学报, 1987, 30(2): 206~215.
- [2] CHEN L, YEH C. Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with an “integrally small” coefficient [J]. J Math Anal Appl, 1980, 78: 49~57.
- [3] JOHNSON G W, YAN J. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equation with an “integrally small” coefficient [J]. J Math Anal Appl, 1985, 105: 419~432.
- [4] BLASKO R, GRAEF J R, HACIK M, et al. Oscillatory behavior of solutions of nonlinear differential equations of the second order [J]. J Math Anal Appl, 1990, 151: 330~343.
- [5] 徐志庭. 具有“弱积分小”系数的二阶椭圆型偏微分方程的振动性质[J]. 系统科学与数学, 1998, 18(4): 478~484.
- [6] GILBERG D, TRUDINGER N S. Elliptic partial differential equation of second order [M]. New York: Springer-Verlag, 1977. 1~98.

Oscillation Theorems of Elliptic Differential Equations by Methods of the Sequence of Functions

XU Zhi-ting^{}, LI Yuan-qing*

Abstract: The main purpose of this paper is to study the oscillatory behavior of solution of second order nonlinear elliptic differential equation with “weakly integrally small” coefficient. Some new sufficient conditions for oscillation of all solutions of the equations are obtained by methods of sequence of functions.

Keywords: second order nonlinear elliptic differential equations; oscillation; “weakly integrally small” coefficient; the sequence of functions

·新书推荐·

我国自然科学领域中首部生物地球化学方面 的系统性论著《生物地球化学》面世

由中山大学王将克、常弘、廖金凤等编著的《生物地球化学》一书, 于 1999 年 5 月由广东科技出版社出版。该书的出版获得广东省优秀科技专著出版基金会的资助。

生物地球化学近一个世纪以来已逐渐发展为成熟的地质学、生物学和环境科学的基础理论学科。本书的内容包括地球表层, 尤其是生物圈中的生物有机体及其产物(或称生物有机化合物和生物元素)与其周围环境之间的地球化学作用、物质循环、能量转换和演化规律等。其范围涉及生命的起源、地球的演化、矿产资源、全球变化、人类与环境、农业等。本书的特点是根据科学分类学的基本原则和地球生物物质的光学活性原理, 建立了跨学科的生物地球化学的科学分类系统。其内容包括四大部分: 生物无机地球化学、生物有机地球化学、微生物地球化学和环境生物地球化学(含人为地球化学和农业生物地球化学)。

该书约 85 万字, 共 5 篇 25 章。内容相当丰富, 覆盖面广, 是我国自然科学领域中首部生物地球化学方面的系统性论著。本书的出版填补了我国这一科学领域的空白。从书中不但可以学习到生物地球化学有关的重要理论, 对实际的应用工作也很有帮助。该书可供从事地球科学、生命科学、环境科学领域中的研究人员、教师、研究生作为教学和科研的参考书。

^{*} Department of Scientific Computing and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou 510275, Chi-