

一类 Sierpinski 海绵的 Hausdorff 测度^{*}

周作领

吴 敏

(中山大学岭南(大学)学院, 广州 510275) (湖北大学)

摘 要 对每一个 $m \geq 1$, 定义一个 Sierpinski 海绵, 它们的 Hausdorff 维数为 1, 它们的 1-维 Hausdorff 测度被完全确定.

关键词 分形, 自相似集, Hausdorff 维数与测度, Sierpinski 海绵

分类号 O 174. 12

本文讨论 Hausdorff 维数为 1 的一个 Sierpinski 海绵的序列, 完全确定了它们的 1-维 Hausdorff 测度. 本文给出证明纲要, 细节另文给出.

设 $m \geq 1$. 记 $I_0^m \subset R^m$ 为 m 维单位立方体. 易见 I_0^m 有 2^m 个顶点. I_0^m 可以看成是 m 个单

位线段的笛卡尔积 $I_0^m = I \times I \times \cdots \times I$. 把每一个 I 分成 2^n 等份, 则 I_0^m 可被分成 $2^m \times 2^m \times \cdots \times 2^m = 2^{m^2}$ 个边长为 $1/2^n$ 的小 m 维立方体, 挖去除位在 I_0^m 的顶点上的 2^n 个外的其余的小 m 维立方体, 得到的集合的闭包记为 I_1^m . 对 I_1^m 的每一个小 m 维立方体重复上述过程, 得到的集合记为 I_2^m . 无限重复上述过程, 得到 $I_0^m \supset I_1^m \supset \cdots \supset I_n^m \supset \cdots$.

非空集合 $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n^m$

叫作一个 Sierpinski 海绵 (易见当 $m=1$ 时, $S=[0, 1]$; $m=2$ 时, S 为 Sierpinski 地毯). S 可由 2^m 个相似比为 $1/2^n$ 的相似函数生成且满足开集条件. 因此 S 的 Hausdorff 维数 $s = \dim_H(S)$ 等于它的自相似维数, 由方程 $2^m (1/2^n)^s = 1$ 决定^[1], 即 $s=1$. 用 $H(S)$ 表示 S 的 1-维 Hausdorff 测度. 本文的主要结果是

定理 1 $H(S) = \frac{1}{m}, \forall m \geq 1$.

下面有关高维几何和分形几何的准备是必要的.

(1) 设 $n \geq 0$. 易见 I_n^m 由 2^{m-n} 个边长为 $1/2^{n-n}$ 的 m 维立方体构成. 这些立方体称为 I_n^m 的基本立方体, 记作 $\square_n$. 易见, 在 $\square_n$ 上可以生成一个与 S 有相似比为 2^{n-n} 的几何相似集合, 记作 $2^{n-n} S$. 由 Hausdorff 测度的齐次性质, 有

$$H(1/2^{n-n} S) = (1/2^{n-n}) H(S), \forall n \geq 0.$$

(2) 在 I_0^m 上定义分布函数 μ :

* 国家科委“非线性科学”项目和国家教委博士点基金 (9555810) 资助项目

收稿日期: 1998-10-11 周作领, 男, 60 岁, 教授

$$\begin{cases} \mu(I_0^m) = \overline{m}, \\ \mu(\square_n) = 1/2^{n-1} \overline{m}, \\ \mu(I_0^m - S) = 0. \end{cases}$$

易见, μ 是 I_0^m 上的一个测度, 其支撑是 S , μ 限制在 S 上是其上的一个质量分布.

(3) 在 $\mathbb{R}^m$ 上建立直角坐标系, 以 I_0^m 的一个顶点为原点, 以过此顶点的 m 个边为坐标向量. 由原点出发的对角线的方向为 $\vec{e} = (1, \dots, 1)$, 其长度为 $|\vec{e}| = \overline{m}$. 易见这样的对角线有 2^{m-1} 个.

在对角线 $\vec{e}$ 上取点 (向量) $\vec{r} = (r, \dots, r)$ ($0 \leq r \leq 1$), 过此点作与 $\vec{e}$ 垂直的 $m-1$ 维超平面 $G_{\overline{m}}$ (它与原点的距离为 $r \overline{m}$). $G_{\overline{m}}$ 与 m 个坐标平面构成一个 m 维多面体, 记作 $PG_{\overline{m}}$.

引理 1 $\mu(PG_{\overline{m}}) \geq \frac{m}{2} r \overline{m}$, $0 \leq r \leq 1$.

这个引理对定理 1 的证明是关键.

(4) 记 $\mathcal{C}$ 为在 I_0^m 上向对角线 $\vec{e}$ 的垂直投影. I_0^m 有 2^m 个顶点, 它们的坐标是 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, 其中, $x_i = 0$ 或 $1, i = 1, \dots, m$. 把这些顶点分成 $m+1$ 类: 坐标中有且仅有 j 个 1 的顶点归作一类, 记作 $A_j, j = 0, 1, \dots, m$. 易见, A_j 类顶点共有 C_m^j 个, 其中 C_m^j 为组合符号.

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in I_0^m$, 且记它在 $\mathcal{C}$ 作用下象点 (向量) 为 $\vec{r} = (r, \dots, r)$. 显然有 $(x - \vec{r}) \cdot \vec{e} = 0$. 由此可得 $x_1 + \dots + x_m = mr$ 或 $r = (1/m)(x_1 + \dots + x_m)$. 由此易证

引理 2 同一类的顶点在 $\mathcal{C}$ 作用下的象点重合.

(5) 设 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为 I_0^m 的一个顶点, 其中 $x_i = 0$ 或 $1, i = 1, \dots, m$. 令 $\square_1$ 为包含这个顶点的 I_1^m 的基本立方体. 易见, $\square_1$ 的顶点 $(y_1, \dots, y_m)$ 满足

$$\begin{cases} y_i = 1 \text{ 或 } 1 - 1/2^m, \text{ 当 } x_i = 1 \text{ 时}, \\ y_i = 0 \text{ 或 } 1/2^m, \text{ 当 } x_i = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

由此易证

引理 3 同一类顶点所在的 I_1^m 的基本立方体在 $\mathcal{C}$ 作用下象集重合.

易于计算, A_j 类的顶点所在的 I_1^m 的基本立方体在 $\mathcal{C}$ 作用下象集为线段

$$\left[\frac{j}{m} \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) \overline{m}, \frac{j}{m} \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) \overline{m} + \frac{1}{2^m} \overline{m} \right], j = 0, 1, \dots, m.$$

(6) 在 $F_0 = [0, \overline{m}]$ 上定义压缩函数 $S_j = \frac{1}{2^m} x + \frac{j}{m} \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) \overline{m}, j = 0, 1, \dots, m$.

由 S_j 生成的自相似集记为 $F, F = \bigcup_{j=0}^m S_j(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1, \dots, i_k=0}^m S_{i_1 \dots i_k}(F_0)$,

这里 $S_{i_1 \dots i_k} = S_{i_1} \dots S_{i_k}$, 即函数的复合. 记

$$F_k = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=0}^m S_{i_1 \dots i_k}(F_0).$$

设 $k \geq 0$. 则 F_k 是由 $(m+1)^k$ 个长度为 $\overline{m}/2^{n \cdot k}$ 的不相交线段组成, 每一个这样的线段称作 F_k 的基本线段, 记作 I_k . 又 $F_0 - F_1 = F_0 - \bigcup_{j=0}^m S_j(F_0)$ 是由 m 个不相交的开区间构成, 长度

为 $\left[\frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) \overline{m}, \frac{1}{2^m} \overline{m} \right]$, 称作 F_0 的 1 阶挖去区间. $S_j(F_0)$ 的 1 阶挖去区间称作 F_0 的 2 阶挖去区间, $j = 0, 1, \dots, m$. 类似地, 可以定义 F_0 的高阶挖去区间.

(7) 在 F_0 上定义分布函数 m :

$$\begin{cases} m(F_0) = \overline{m}, \\ m(F_0 - F) = 0, \\ m(S_{j_1} S_{j_2} \cdots S_{j_k}(F_0)) = \frac{\overline{m}}{2^k} m(S_{j_1} \cdots S_{j_k}(F_0)), j, j_1, \cdots, j_k = 0, 1, \cdots, m, k \geq 0. \end{cases}$$

易见, m 是一个测度, 支撑为 F , m 限制在 F 上是其上的一个质量分布.

把 F_0 看成 I_0^n 的对角线, 则 μ 在 F_0 上诱导一个测度, F_0 的子集的关于这个测度的测度等于这个子集的 μ 的逆象的 μ -测度. 易于看出, μ 诱导的这个测度恰就是 m .

引理 4 $\mu(PG) = \overline{m} \geq \frac{\overline{m}}{2^n} r \leq \overline{m} \Leftrightarrow m([0, r \overline{m}]) \geq \frac{\overline{m}}{2^n} r \overline{m}, 0 \leq r \leq 1$.

通过引理 4 证明引理 1 是简捷的.

(8) 设可测集合 $V \subset \mathbf{R}^n$, 则 $\mu(V) \leq |V|$.

最后, 由 (8), 据质量分布原理, 有 $H(S) \geq \overline{m}$, 再据文 [2], 有 $H(S) \leq \overline{m}$. 定理 1 由此得证.

在由相似函数生成 S 时, 考虑相似比不大于 $1/2^n$ 的相似函数, 得到的自相似集有不大于 1 的 Hausdorff 维数, 可以得到类似的结果, 但证明之中涉及凹函数, 计算较复杂.

参 考 文 献

- 1 Falconer K. Fractal geometry. New York: John Wiley and Sons, 1990. 1~198
- 2 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度——Koch 曲线. 中国科学 (A), 1998, 28 (2): 103~107

Hausdorff Measure to Sierpinski Sponge Series

Zhou Zuoling* Wu Min

Abstract A sequence of Sierpinski sponge is defined, which have Hausdorff dimension 1 and whose 1-dimensional Hausdorff measures have been decided exactly.

Keywords fractal, self-similar set, Hausdorff dimension and measure, Sierpinski sponge

· 简 讯 ·

陈小明教授荣获《SC》国际论文被引用 篇数全国个人排位第三名

据“中山大学简报”报道: 中山大学化学与化学工程学院陈小明教授在 1997 年度共有 16 篇论文被《SC》引用 30 次, 继 1996 年度《SC》系统论文数全国个人排位第五名之后, 又荣获 1997 年度《SC》国际论文引用篇数全国个人排位第三名, 国际论文被引用篇数全国个人排位奖是今年首次设立的奖项.

(本刊通讯员)

* Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China