

文章编号: 0529-6579 (1999) 02-0006-04

可交换厄米特矩阵乘积的特征值^{*}

黎 罗 罗

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 设 A, B 为 n 阶不定厄米特矩阵, 且 $AB=BA$; μ_i, γ_i 及 λ_i 分别为 A, B 及 AB 依升序排列的特征值. 给出的上界 $\lambda_k \leq (\mu_{l-k+1} - \mu_1) \gamma_l + \mu_1 \gamma_1 (k=1, \dots, l)$ 及下界 $\lambda \geq (\mu_{k-l} - \mu_1) \gamma_{l+1} + \mu_1 \gamma_n (k=l+1, \dots, n)$ (其中 l 是 B 的负惯性指标) 以及一系列结果改进了一般估计: $\min\{\mu_1 \gamma_n, \mu_n \gamma_1\} \leq \lambda_k \leq \max\{\mu_1 \gamma_1, \mu_n \gamma_n\}$.

关键词: 厄米特矩阵; 可交换矩阵; 特征值

中图分类号: O 151.21 **文献标识码:** A

借助矩阵 A, B 的特征值估计乘积 AB 的特征值, 是理论及实践中常遇到的问题. 文 [1] 定理 3 就 A, B 为 n 阶可交换 ($AB=BA$) 的、不定的厄米特矩阵的情形, 给出如下结果

$$\min\{\mu_1 \gamma_n, \mu_n \gamma_1\} \leq \lambda_k \leq \max\{\mu_1 \gamma_1, \mu_n \gamma_n\} \quad (1)$$

其中, μ_i, γ_i 及 λ_i 分别表示 A, B 及 AB 的依升序排列的特征值. 该结果对 AB 的 n 个特征值给出同一对上下界, 未免笼统. 本文尽量充分利用 μ_i, γ_i 蕴含的信息, 给出细致的上、下界.

一般以 $\sigma_k(\cdot)$ 记矩阵 $(\cdot)$ 依升序排列的第 k 个实特征值; $\sigma(\cdot)$ 表示矩阵 $(\cdot)$ 的特征值的集合. 若 T 为 N 个实数的数组, 对于 $m \leq N$, 以 $g_m(T)$ ($s_m(T)$) 记 T 中最大(小) m 个数依升序排列所成的向量. 如 $T = \{1, 4, 2, 4, 8\}$ 则 $g_3(T) = (4, 4, 8)$, $s_3(T) = (1, 2, 4)$, 对 m 维实向量 u 和 v , $u \leq v$ 表示 u 的分量均不大于 v 的对应分量.

1 A, B 分别为 n 阶半正定及不定厄米特矩阵的情形

引理 1 设 $AB=BA$; A 正定, 其特征值为 $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$; B 的特征值为 $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_l < 0 \leq \gamma_{l+1} \leq \dots \leq \gamma_n$, 则

1) AB 有 l 个负特征值, 且

$$s_l\{\mu_{n-l+1} \gamma_j \mid i, j = 1, \dots, l\} \leq s_l\{\sigma(AB)\} \leq g_l\{\mu_i \gamma_j \mid i, j = 1, \dots, l\}$$

2) AB 有 $n-l$ 个负特征值, 且

$$s_{n-l}\{\mu_i \gamma_{l+j} \mid i, j = 1, \dots, n-l\} \leq g_{n-l}\{\sigma(AB)\} \leq g_{n-l}\{\mu_i \gamma_j \mid i, j = l+1, \dots, n\}$$

证明 由 $AB=BA$ 知 A, B 可用同一酉矩阵对角化, 因此 AB 的特征值为 $\{\mu_i \gamma_j \mid i, j =$

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (970142)

收稿日期: 1998-05-14 作者简介: 黎罗罗, 男, 1946 年生, 副教授.

$1, \dots, n\}$, 其中, $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 为 $(1, \dots, n)$ 的某个置换. 由 A 正定, $\mu_i > 0 (\forall i)$, 易知 AB 有 l 个负特征值, $n-l$ 个非负特征值. $sl\{\sigma(AB)\}$ 有 l 个负分量, 形如, $\mu_i \gamma_j$, $(t, j = 1, \dots, l)$. 其中诸 γ_j 为负数, 从而易知第 1 式成立, 同理推证第 2 式.

引理 2 设 $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ 及 $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ 是 $(1, \dots, m)$ 的置换; $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m$

1) 若 $0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_m$, $a_k = x_{i_k} y_{j_k}$ 且 $a_1 \leq \dots \leq a_m$, 则

$$\max\{x_k y_1, x_1 y_k\} \leq a_k \leq \min\{x_k y_m, x_m y_k\}$$

2) 若 $z_1 \leq \dots \leq z_m \leq 0$, $b_k = x_{i_k} z_{j_k}$ 且 $b_1 \leq \dots \leq b_m$, 则

$$\max\{x_n z_k, x_{m-k+1} z_1\} \leq b_k \leq \min\{x_1 z_k, x_{m-k+1} z_m\}$$

证明 对于递增的非负序列 $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ 及 $\{a_i\}$, 结论 1) 是显然的. 为证结果 2), 只需将结论 1) 用于递增非负序列 $\{x_i\}$, $\{y_i: = -z_{m-i+1}\}$ 及 $\{a_i: = -b_{m-i+1}\}$.

定理 1 假设同引理 1, 则

$$1) \max\{\mu_n \gamma_j, \mu_{n-j+1} \gamma_1\} \leq \lambda_j \leq \min\{\mu_1 \gamma_j, \mu_{l-j+1} \gamma_l\} \quad (j = 1, \dots, l)$$

$$2) \max\{\mu_{j-1} \gamma_{l+1}, \mu_1 \gamma_j\} \leq \lambda_j \leq \min\{\mu_j \gamma_n, \mu_n \gamma_j\} \quad (j = l+1, \dots, n)$$

定理 1 可由引理 1 及引理 2 证得. 借助极限方法可得以下定理 2.

定理 2 定理 1 在条件“ A 正定” 改换成“ A 半正定” 后仍成立.

2 A, B 均为 n 阶不定厄米特矩阵且 $AB = BA$ 的情形

注意 $AB = (A - \mu_1 I)B + \mu_1 B$, 其中半正定矩阵 $A - \mu_1 I$ 与 B 可交换, 从而 $(A - \mu_1 I)B$ 仍为厄米特矩阵. 由 Wely 定理(文[2] 定理 4.3.7) 有

$$\sigma_k[(A - \mu_1 I)B + \mu_1 B] \leq \sigma_j[(A - \mu_1 I)B] + \sigma_i(\mu_1 B) \quad (j+i = n+k) \quad (2)$$

$$\sigma_k[(A - \mu_1 I)B + \mu_1 B] \geq \sigma_j[(A - \mu_1 I)B] + \sigma_i(\mu_1 B) \quad (j+i = k+1) \quad (3)$$

引理 3 设 $k = 1, \dots, l$. 则

$$1) \text{ 当 } (\mu_n - \mu_1)/|\mu_1| \leq (\gamma_n - \gamma_{n-k+1})/|\gamma_1| \quad (4)$$

时有 $\mu_1 \gamma_n \leq \mu_n \gamma_1$;

$$2) \text{ 当 } |\mu_1|/|\mu_n| \leq (\gamma_k - \gamma_1)/|\gamma_n - \gamma_k| \quad (5)$$

$$\text{或 } (\gamma_n - \gamma_1)/|\gamma_1| \leq (\mu_n - \mu_{n-k+1})/|\mu_1| \quad (6)$$

时均有 $\mu_1 \gamma_n \geq \mu_n \gamma_1$;

证明 只给出 2) 的证明, 1) 的证明是类似的. 注意 $|\mu_1| = -\mu_1$, 由 (5) 式, $-\mu_1(\gamma_n - \gamma_k) \leq \mu_n(\gamma_k - \gamma_1)$ 从而 $\mu_n \gamma_1 - \mu_1 \gamma_n \leq \gamma_k(\mu_n - \mu_1) \leq 0$, (因 $\gamma_k < 0$) 证得 $\mu_1 \gamma_n \geq \mu_n \gamma_1$. 类似地, 由 (6) 式, 有 $-\mu_1(\gamma_n - \gamma_1) \leq -\gamma_1(\mu_n - \mu_{n-k+1})$ 从而 $\mu_n \gamma_1 - \mu_1 \gamma_n \leq \gamma_1(\mu_{n-k+1} - \mu_1) \leq 0$, 即 $\mu_1 \gamma_n \geq \mu_n \gamma_1$.

引理 4 设 $k = l+1, \dots, n$.

$$1) \text{ 当 } (\mu_n - \mu_1)/|\mu_1| \leq (\gamma_{n-k+1} - \gamma_1)/\gamma_n \quad (7)$$

时有 $\mu_1 \gamma_1 \geq \mu_n \gamma_n$;

$$(2) \text{ 当 } |\mu_1|/|\mu_n| \leq (\gamma_n - \gamma_k)/(\gamma_k - \gamma_1) \quad (8)$$

$$\text{或 } (\gamma_n - \gamma_1)/\gamma_n \leq (\mu_n - \mu_k)/|\mu_1| \quad (9)$$

时均有 $\mu_1 \gamma_1 \geq \mu_n \gamma_n$.

与引理 3 相仿可证.

定理 3 设 $k = 1, \dots, l$. 则 λ_k 有如上的上界, 它们优于结果(1)式中相应的界

$$\lambda_k \leq (\mu_{l-k+1} - \mu_1) \gamma_l + \mu_1 \gamma_1 \quad (k = 1, \dots, l) \quad (10)$$

证明 在(2)式中令 $j = k, i = n$, 再用定理 1 之 1) 得

$$\begin{aligned} \lambda_k &\leq \sigma_k[(A - \mu_1 I)B] + \sigma_n(\mu_1 B) \leq \\ &\min\{\sigma_1(A - \mu_1 I)\gamma_k, \sigma_{l-k+1}(A - \mu_1 I)\gamma_l\} + \mu_1 \gamma_1 \leq \\ &(\mu_{l-k+1} - \mu_1) \gamma_l + \mu_1 \gamma_1 \end{aligned}$$

其中注意到 $\mu_1 < 0$ 从而 $\sigma_n(\mu_1 B) = \mu_1 \gamma_1$, 由 $(\mu_{l-k+1} - \mu_1) \gamma_l \leq 0$ 可见(10)式优于(1)式中相应的上界.

定理 4 设 $k = l+1, \dots, n$. 则 λ_k 有如下的下界, 它们优于结果(1)式中相应的界

$$\lambda_k \geq (\mu_{k-l} - \mu_1) \gamma_{l+1} + \mu_1 \gamma_n \quad (k = l+1, \dots, n) \quad (11)$$

证明 在(3)式中令 $j = k, i = 1$, 再用定理 1 之 2) 得

$$\begin{aligned} \lambda_k &\geq \sigma_k[(A - \mu_1 I)B] + \sigma_1(\mu_1 B) \geq \\ &\max\{\sigma_{k-l}(A - \mu_1 I)\gamma_{l+1}, \sigma_1(A - \mu_1 I)\gamma_k\} + \mu_1 \gamma_n \geq \\ &(\mu_{k-l} - \mu_1) \gamma_{l+1} + \mu_1 \gamma_n \end{aligned}$$

由 $(\mu_{k-l} - \mu_1) \gamma_{l+1} \geq 0$ 知(11)式优于(1)式中相应的下界.

定理 5 设 $k = 1, \dots, l$. 则

1) 引理 3 中(4)式成立时, 本文下界

$$\lambda_k \geq (\mu_n - \mu_1) \gamma_1 + \mu_1 \gamma_{n-k+1} \quad (12)$$

改进了式(1)的结果;

2) 引理 3 中(5)或(6)式成立时, 本文有下界

$$\lambda_k \geq \max\{(\mu_n - \mu_1) \gamma_k, (\mu_{n-k+1} - \mu_1) \gamma_1\} + \mu_1 \gamma_n \quad (13)$$

改进了(1)式的结果.

证明

1) 在(3)式中令 $j = 1, i = k$, 再用定理 1 之 1) 得

$$\begin{aligned} \lambda_k &\geq \sigma_1[(A - \mu_1 I)B] + \sigma_k(\mu_1 B) \geq \\ &\max\{\sigma_n(A - \mu_1 I)\gamma_1, \sigma_n(A - \mu_1 I)\gamma_1\} + \mu_1 \gamma_{n-k+1} = \\ &(\mu_n - \mu_1) \gamma_1 + \mu_1 \gamma_{n-k+1} \end{aligned}$$

即(12)式. 当(4)式成立时, 一方面 $\min\{\mu_1 \gamma_n, \mu_n \gamma_1\} = \mu_1 \gamma_n$, 另一方面(12)式右端在(4)式成立时不小于 $\mu_1 \gamma_n$, 可见(4)式成立时, (12)式改进了结果(1);

2) 在(3)式中令 $j = k, i = 1$, 再用定理 1 之 1), 类似地得(13)式. 由(5)或(6)式有 $\min\{\mu_1 \gamma_n, \mu_n \gamma_1\} = \mu_n \gamma_1$, 在条件(5)下可推知 $(\mu_n - \mu_1) \gamma_k + \mu_1 \gamma_n \geq \mu_n \gamma_1$, 在条件(6)下可推知 $(\mu_{n-k+1} - \mu_1) \gamma_1 + \mu_1 \gamma_n \geq \mu_n \gamma_1$. 所以在条件(5)或(6)成立时, 下界(13)均改进了(1)式中的下界.

定理 6 设 $k = l+1, \dots, n$. 则

1) 引理 4 中(7)式成立时, 本文上界

$$\lambda_k \leq (\mu_n - \mu_1) \gamma_n + \mu_1 \gamma_{n-k+1} \quad (14)$$

改进了(1)的结果;

2) 引理 4 中条件(8)或(9)成立时, 本文上界

$$\lambda_k \leq \min\{(\mu_k - \mu_1)\gamma_n, (\mu_n - \mu_1)\gamma_k\} + \mu_1\gamma_1 \quad (15)$$

改进了(1)的结果.

证明 证法与定理 5 的相仿.

1) 在(2)式中令 $j = n, i = k$, 再用定理 1 之 2) 得(14) 式; 由(7) 成立时可知 $\max\{\mu_1\gamma_1, \mu_n\gamma_n\} = \mu_1\gamma_1$. 另一方面由条件(7) 可推知(14) 式的右端 $(\mu_n - \mu_1)\gamma_n + \mu_1\gamma_{n-k+1} \leq \mu_1\gamma_1$, 结论 1) 得证.

2) 在(2) 式中令 $j = k, i = n$, 再用定理 1 之 2) 可得(15) 式, 条件(8) 或(9) 均可导出 $\max\{\mu_1\gamma_1, \mu_n\gamma_n\} = \mu_n\gamma_n$. 由条件(9) 可得 $(\mu_k - \mu_1)\gamma_n + \mu_1\gamma_1 \leq \mu_n\gamma_n$ 由条件(8) 可得 $(\mu_n - \mu_1)\gamma_k + \mu_1\gamma_1 \leq \mu_n\gamma_n$. 结论 2) 得证.

总之, 对 $\lambda_k (k = 1, \dots, l)$ 有上界(10), 在引理 3 条件下有下界(12) 或(13); 对 $\lambda_k (k = l+1, \dots, n)$ 有下界(11), 在引理 4 条件下有上界(14) 或(15).

因为 $\sigma_k(AB) = \sigma_k(BA)$, 故也可对 AB 及 BA 用上述结果分别求 λ_k 的界, 选择其中较好的结果而用之. 最后加强假设条件, 有如下定理 7.

定理 7 加设 $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_q < 0 \leq \mu_{q+1} \leq \dots \leq \mu_n, q > l$, 则对 $q-l$ 个特征值 $\lambda_k (k = l+1, \dots, q)$ 有上, 下界(16), 它们改进了结果(1).

$$(\mu_{k-l} - \mu_1)\gamma_{l+1} + \mu_1\gamma_n \leq \lambda_k \leq (\gamma_{q-k+1} - \gamma_1)\mu_q + \mu_1\gamma_1 \quad (16)$$

证明 对 $\sigma_k(BA)$ 用(10) 式得右边的不等式.

参考文献:

- [1] 徐邦腾. 关于两个厄米特矩阵乘积的特征值的估计问题 [J]. 数学的实践与认识, 1995 (2): 91 ~ 94.
- [2] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 4, 184.

Eigenvalues of AB when A and B are Commutative Hermitian Matrices

LI Luo-luo *

Abstract: Let A and B be n by n commutative Hermitian matrices with eigenvalues $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ and $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_l < 0 \leq \dots \leq \gamma_n$, respectively. Denote by $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ the eigenvalues of AB . A series of bounds for λ_k including (1) $\lambda_k \leq (\mu_{l-k+1} - \mu_1)\gamma_l + \mu_1\gamma_1 (k = 1, \dots, l)$ and (2) $\lambda_k \geq (\mu_{k-l} - \mu_1)\gamma_{l+1} + \mu_1\gamma_n (k = l+1, \dots, n)$, are derived. These results are tighter than those in literature: $\min\{\mu_1\gamma_n, \mu_n\gamma_1\} \leq \lambda_k \leq \max\{\mu_1\gamma_1, \mu_n\gamma_n\}$.

Keywords: Hermitian matrices; commutative matrices; eigenvalue

* College of Mathematics and Computing Sciences, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China