

文章编号: 0529-6579 (1999) 06-0006-05

自由电子激光器的渐近分析^{*}

李 怡 平

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 对于波动器磁场纵向渐变的自由电子激光器, 不仅渐变锥度对电子能量有累积影响, 而且信号场的增长率对电子能量也有累积效应. 这些高阶微量可以通过将运动方程和波动方程渐近展开后得到. 由电子能量谐振的发生条件可以确定系统参数慢变和更慢变的 2 种特性以及系统信号场微速、低速和高速等 3 级不同的增长速率. 这是一个有微摄动带慢变参数的强非线性振动系统.

关键词: 奇异摄动; 非线性振动; 自由电子激光器

中图分类号: O 29; TB 12 **文献标识码:** A

自由电子激光器最初用量子力学分析, 后来文 [1] 证明它可以用电动力学方法处理. 然而, 其后一系列研究工作中所推导的运动方程仅考虑首阶项. 由于在自由电子的谐振器中, 磁场的长度与其周期之比是个极大的量, 系统中的高阶微量项的累积效应不可忽略. 其实, 文 [2] 已注意到这个问题, 但它仍未能导出具体方程. 本文将整个系统无量纲化, 并引入一系列小参数, 将运动方程和波动方程渐近展开, 使之能系统和严格地计入各类不可忽略的高阶微量项, 最后建立起有效的渐近数学模型, 以供系统分析.

1 运动方程及其规范化

1.1 首阶方程

首先推导首阶渐近方程, 然后以此为基础计算高阶项. 自由电子的运动受到如下波动器磁场的控制.

$$\mathbf{B}_w = B_w(Z) \left(X \cos \frac{2\pi}{\lambda_w} Z + Y \sin \frac{2\pi}{\lambda_w} Z \right) \quad (1)$$

其中, B_w 是磁场波幅, λ_w 是磁场波长, X 和 Y 为正交单位向量, 而 Z 为沿着磁场对称轴方向. 本文采用大写字母记带量纲的变量而让小写字母记无量纲变量. 自由电子的运动还受到激光信号场的影响, 记其信号波幅为 E_s 、波长 λ_s 、频率 ω_s 、相位 ϕ_s 和时间 T . 信号场 E_s 和 B_s 的方程在这里暂略, 其规范式由下节 (8) 式给出.

电子的运动方程可写为

$$\mathbf{P} = e\mathbf{E}_s + e\beta \times (\mathbf{B}_s + \mathbf{B}_w) \quad (2)$$

^{*} 收稿日期: 1999-02-06 作者简介: 李怡平, 男, 1943 年生, 教授.

其中, e 是电子电荷, $\mathbf{p} = \gamma m c \boldsymbol{\beta}$ 是动量, 而 γ 是以静止能量为单位的电子能量, $\boldsymbol{\beta}$ 是以光速为单位的电子速度, 可分解为 $\beta_z \mathbf{z} + \boldsymbol{\beta}_\perp$, 其纵向速度 β_z 极大于横向速度 $\boldsymbol{\beta}_\perp$. 电子的运动方程已舍去电荷力和辐射反力, 文 [3] 讨论了舍掉这些附加力所产生的累积效应的条件, 本文的讨论已假定这些条件都成立. 由于电子以高度相对论速度运动, 方程 (2) 可以写成

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{e}{mc\gamma} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_w \quad (3)$$

此方程保留的阶为 $1/\gamma^2$. 将它的解 $\boldsymbol{\beta}$ 代入 Lorentz 力的第 4 分量可以得到

$$\gamma = \frac{e E_s \beta_\perp}{mc} \sin \phi, \quad \phi = \frac{2\pi c}{\lambda_w} \left[1 - \frac{\lambda_w}{\lambda_s} \frac{1 + b_w^2}{2\gamma^2} \right] \quad (4)$$

其中, $\phi = 2\pi (1/\lambda_w + 1/\lambda_s) Z - \omega_s T + \phi_s$, $b_w = \lambda_w e B_w / (2\pi m c^2)$. 由谐振状态, 即上式中 $\phi = 0$, 可以定义谐振电子能量为

$$\gamma_r^2 = \frac{\lambda_w}{\lambda_s} \frac{1 + b_w^2}{2} \quad (5)$$

1.2 规范化

选取 $\lambda_w / (2\pi)$ 作为单位长度而光在单位长度内传播的时间 $\lambda_w / (2\pi c)$ 作为单位时间, 由此得到无量纲变量 $z = 2\pi Z / \lambda_w$ 及 $t = 2\pi c T / \lambda_w$. 波动器磁场的无量纲 b_w 已在式 (4) 给出, 与此相应, 信号场的无量纲参数可为 $b_s = \lambda_w e B_s / (2\pi m c^2)$ 及 $e_s = \lambda_w e E_s / (2\pi m c^2)$. 经过这些无量纲化变换后, 方程 (2) 及 (4) 之第 1 式可以成

$$d(\gamma \boldsymbol{\beta}) / dt = \mathbf{e}_s + \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{b}_s + \mathbf{b}_w), \quad d\gamma / dt = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_s \quad (6)$$

为了度量此方程中各项的数量级, 需引入一个小参数 ϵ , 这个小参数还将用来度量波动器场的变化率. 为此定义 $\epsilon = \lambda_w / (2\pi L)$, 也就是 $\epsilon = 1/l$, 其中, L 和 l 分别为波动器的有量纲和无量纲长度, 通常波动器长达数米而其中的磁场波长 λ_w 仅为厘米级, 所以 ϵ 是个很小的参数. 由于 $l = 1/\epsilon$, 波动器的长度 (电子运动的区间) 应考虑为高阶大. 这意味着系统中高阶微量的累积效应相当重要.

本文讨论的波动器的波长 λ_w 为常量而波幅 b_w 为渐变量, 由于在整个 $l = 1/\epsilon$ 范围内 b_w 的数量级不变, 它的自变量是个慢变量, 记为 $\bar{z} = \bar{z}$, 另外由 (5) 式知道必须有 $b_w = O(1)$ 才能使波动器导致谐振状态 γ_r . 下面将对那些 $O(1)$ 规范化的变量用上加一杠表示. 式 (1) 规范为

$$\mathbf{b}_w = \bar{b}_w(\bar{z})(\hat{x} \cos z + \hat{y} \sin z) \quad (7)$$

因为自由电子激光器在谐振状态 (5) 运行, 电子能量 γ 与 λ_w / λ_s 同阶. 由此定义第 2 个小参数: $\mu = \lambda_s / \lambda_w$, 将用来衡量 γ . μ 和 ϵ 的数量级关系暂时还不清楚, 假定为 $\mu = O(\epsilon^\alpha)$, 其中 α 的值将在下节给出. 信号场的规范波数和电子的无量纲能量分别为 $\lambda_w / \lambda_s = \epsilon^{-\alpha} k_s$ 和 $\gamma = \epsilon^{-\alpha/2} \bar{\gamma}$. 假定信号场中 $e_s = O(\epsilon^\xi)$, 其中 ξ 将在下节证明为 0, 由上述变换, 激光信号场可规范为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_s &= -\epsilon^\xi \bar{e}_s [\hat{x} \sin(\epsilon^{-\alpha} k_s(z - t) + \phi_s) + \hat{y} \cos(\epsilon^{-\alpha} k_s(z - t) + \phi_s)] \\ \mathbf{b}_s &= \bar{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (8)$$

1.3 渐近校正

由以上规范化方程可解得 $d(\boldsymbol{\beta}_\perp \gamma) / dt$, 对此积分一次有

$$\beta_{\perp} = \epsilon^{\alpha/2} \frac{b_w}{\gamma} (\hat{x} \cos z + \hat{y} \sin z) - \epsilon^{3\alpha/2} \frac{b_w'}{\gamma} (\hat{x} \sin z + \hat{y} \cos z) - \epsilon^{3\alpha/2+\xi} \frac{b_s}{\gamma k_s} [\hat{x} \cos (\epsilon^{-\alpha} k_s (z-t) + \phi_s) - \hat{y} \sin (\epsilon^{-\alpha} k_s (z-t) + \phi_s)] \quad (9)$$

其中, $b_w' = db_w/d(\epsilon^{\alpha} z)$. 由于 b_w 是 z 的函数, 所以有 $b_w' = O(\epsilon^{1-\alpha})$. 注意由(8)式有 $b_s = \bar{e}_s$, 此外在积分过程中已应用 $\beta_z dt = dz$ 并假定 $\beta_{\perp}(0) = O(\epsilon^{3\alpha/2})$.

应用方程(9)和(8)之第2式即可将方程(6)之第2方程规范化并渐近展开, 但考虑到分析的方便, 我们将运动方程的 d/dt 变换为 d/dz , 后者可由 $\beta_z = (1 - 1/\gamma^2 - \beta_{\perp}^2)^{1/2}$ 及 $dz/dt = \beta_z$ 等关系得到, 经过代入和渐近展开等一系列运算, 方程(6)之第2式可写成

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\epsilon^{\alpha+\xi} \frac{b_w b_s}{\gamma} \sin \phi - \epsilon^{2\alpha+\xi} \left[\frac{b_w b_s}{2\gamma^3} (1 + b_w^2) \sin \phi + \frac{b_w' b_s}{\gamma} \sin \phi \right] + O(\epsilon^{3\alpha+\xi}) \quad (10)$$

其中, 相位定义为 $\phi = z + \epsilon^{-\alpha} k_s (z-t) + \phi_s$, 由 ϕ 对 z 求导即得第2个方程

$$\frac{d\phi}{dz} = 1 - k_s \frac{1 + b_w^2}{2\gamma^2} + \epsilon^{\alpha} \left[\frac{b_w b_s}{\gamma^2} \cos \phi - \frac{3k_s (1 + b_w^2)^2}{8\gamma^4} + \phi_s' \right] + O(\epsilon^{2\alpha}) \quad (11)$$

其中, $\phi_s' = d\phi_s/d(\epsilon^{\alpha} z)$ 将由波动方程确定. 比较方程(10)和(11)的高阶项, 可以看到必须令 $\xi=0$ 才能使这些项的阶同为 $O(\epsilon^{\alpha})$. 这是导致系统有振动解的唯一选择.

2 谐振和类摆方程

自由电子激光器运行时, 电子能量处于谐振状态. 于方程(11)中令 $d\phi/dz=0$ 可得谐振能量 γ_r 的定义为 $\gamma_r^2 = k_s (1 + b_w^2)/2$, 其中, γ_r 也称同步能量. 运行中每个电子的能量都处于同步的振荡, 即

$$\gamma = \gamma_r + \epsilon^{\alpha/2} \gamma^* \quad (12)$$

这里, 高阶项的阶是由振动系统(10)当 $\xi=0$ 和方程(11)转换成有效的谐振状态时所确定. 从方程(12)可以看到, 均匀波动器中的电子能量仅能贡献出 $O(\epsilon^{\alpha/2})$, 这是因为它们的 γ_r 是常量. 对于锥形波动器, 同步能量 γ_r 是渐减的. 所以可转换的能量为 $O(1)$. 这就是使用锥形波动器后效能可以大大提高的原因.

应用(12)式定义的新尺度变量 γ^* , 系统(10)和(11)变换^[4]为谐振状态有效的方程

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^*}{dz} = & -\gamma_r' - \frac{b_w b_s}{\gamma_r} \sin \phi + \epsilon \frac{b_w b_s}{\gamma_r^2} \gamma^* \sin \phi - \epsilon^2 \left[\frac{b_w b_s}{\gamma_r^3} \gamma^{*2} \sin \phi + \frac{b_w b_s}{k_s \gamma_r} \sin \phi + \frac{b_w' b_s}{\gamma_r} \cos \phi \right] + O(\epsilon^3) \\ \frac{d\phi}{dz} = & \frac{2}{\gamma_r} \gamma^* + \epsilon \left[-\frac{3}{\gamma_r^2} \gamma^{*2} + \frac{b_w b_s}{\gamma_r^2} \cos \phi - \frac{3}{2k_s} + \phi_s' \right] + \epsilon^2 \left[\frac{4}{\gamma_r^3} \gamma^{*3} + \frac{6}{k_s \gamma_r} \gamma^* - \frac{2b_w' b_s}{\gamma_r^3} \gamma^* \cos \phi \right] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $z = \hat{z}$, $\epsilon = \epsilon^{\alpha/2}$, 和 $' \triangleq d/d(\epsilon^{\alpha} z)$. 注意这里的导数项当 $\alpha=1$ 时为 $O(1)$ 而当 $\alpha=2/3$ 时为高阶. 如文[4]所证明, 任何振动系统中的谐振问题都可以应用新尺度变换成类摆方程, 从方程(13)中消去 γ^* 得到

$$\ddot{\phi} + 2 \frac{\gamma_r'}{\gamma_r} + \frac{2b_w b_s}{\gamma_r^2} \sin \phi - \epsilon^{1/2} \left[2 \frac{\gamma_r'}{\gamma_r} + \frac{3b_w b_s}{\gamma_r^2} \sin \phi + \frac{\partial \phi_s'}{\partial \phi} \right] \phi = O(\epsilon) \quad (14)$$

其中, $\frac{\Delta d}{dz} \hat{z}$ 而 $\hat{z} = \epsilon^{1/2} z$, 以及 $\frac{\Delta d}{dz}$ 而 $\hat{z} = \epsilon z = \tilde{z}$. 注意这里已将方程 (13) 中的 α 置为 1. 方程 (14) 的首阶部分描述一个在切向力 $2\gamma_r'/\gamma_r$ 作用下长为 $2b_w b_s/\gamma_r^2$ 的慢变摆.

如在方程 (13) 中令 $\alpha = 2/3$, 于谐振状态展开后将得到另一类更慢变摆, $\hat{z}$ 的定义域为 $O(\epsilon^{-2})$ 而不是慢变摆的 $O(\epsilon^{-1})$, 因此结果方程须保留 $O(\epsilon^{-2})$ 的项, 这使分析计算复杂得多. 然而更慢变谐振系统也有吸引人的特点, 它对电子能量的要求低些和适合于较长波长的激光. 此外, 更慢谐振中心几乎位于原点, 这使电子能量的聚留相位有接近 2π 的最大宽度, 以致效能可以提高.

3 波动方程的渐近展开

信号场参数 b_s 和 ϕ_s 依赖于信号波的渐近变化, 其关系由下列波动方程决定

$$\frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial T^2} = -\frac{4\pi}{c} J_{\perp} \quad (15)$$

其中, J 是横向电流密度, 而 A_s 是相应于 E_s 的矢量势. 波幅 E_b 和相位 ϕ_s 是 z 的慢变函数. 因此, 计算方程 (15) 的左端时可略去对 z 的二阶导数而得到首阶方程

$$\frac{dE_s}{dZ} = \frac{2\pi}{c} J_{\perp} \cdot \hat{e}_1, \quad E_s \frac{d\phi_s}{dZ} = -\frac{2\pi}{c} J_{\perp} \cdot \hat{e}_2 \quad (16)$$

其中, $\hat{e}_1 = X \sin \theta + Y \cos \theta$, $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$ 和 $\theta = (2\pi/\lambda_s) Z - \omega_s T + \phi_s$. 对于首阶渐近, $J_{\perp}$ 可表示为 $e n_e \langle \beta_{\perp} \rangle$, 这里 n_e 是电子密度而 $\langle \beta_{\perp} \rangle$ 为射束中所有电子的平均横向速度. 应用前一节的规范, 上列方程可变换为

$$\begin{aligned} 2 \frac{db_s}{dz} &= \epsilon^{-3\alpha/2} \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} k_s^2 b_w \langle \frac{\sin \phi}{\gamma} \rangle + O \left[\epsilon^{-\alpha/2} \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} \right] \\ 2b_s \frac{d\phi_s}{dz} &= -\epsilon^{-3\alpha/2} \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} k_s^2 b_w \langle \frac{\cos \phi}{\gamma} \rangle + O \left[\epsilon^{-\alpha/2} \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2/m$ 是等离子频率, 角括号记该项的平均值, 显然它以 2π 为周期.

式 (17) 中 2 个方程分别描述波幅和相位的渐近变化. 很明显, 渐近率的数量级由 $\epsilon^{-3\alpha/2} \omega_p^2/\omega_s^2$ 唯一确定. 如果信号场增长过速会削弱射线的相干性和单色性, 所以系数 ω_p^2/ω_s^2 必须相当小. 这个小参数记为 $\kappa = \omega_p^2/\omega_s^2$. 从 (17) 和 (10) 式可解得 b_s , 它的渐近展开式因 κ 的阶不同而有不同的结果. 当 κ 为 $O(\epsilon^{7\alpha/2})$ 、 $O(\epsilon^{3\alpha})$ 或 $O(\epsilon^{5\alpha/2})$ 时, 信号场分别有微、低或高 3 种不同程度的增益. 限于篇幅, 其详细展开式不在此列出.

以上建立的模型均属于带慢变参数的二阶强非线性振动系统. 文 [4, 5] 介绍并比较了几种分析一般带慢变参数振动系统的摄动方法. 而文 [3] 则较详细地讨论其方法在自由电子激光器的应用, 并给出一些有用的分析结果.

参考文献:

- [1] HOPF F A, MEYSTRE P, SCULLY M O, et al. Classical theory of a free-electron laser [J] . Phys Rev Lett, 1976, 37: 1215~1218.
- [2] GARRISON J C, WONG J. Correction to the adiabatic approximation for variable parameter free—electron lasers [J] . IEEE J Quantum Electron, 1981, 17: 1469~1475.
- [3] LI Y P, KEVORKIAN J. The effects of wiggler taper rate and signal field gain rate in free-electron lasers [J] . IEEE J Quantum Electron, 1988, 24: 598~608.
- [4] KEVORKIAN J. Perturbation techniques for oscillatory systems with slowly varying coefficients [J] . SIAM Rev, 1987, 29: 391~461.
- [5] 李怡平. 持续共振解的拟恒等平均与多变量展开的比较 [J] . 中国科学 (A 辑), 1995, 25: 715~718.

Asymptotic Analysis in Free-Electron Lasers

Li Yi-ping *

Abstract: In free-electron lasers with tapered wigglers, there are cumulative effects of tapering and signal field gain. These high-order perturbation terms can be accounted by a systematically asymptotic expansion on motion and wave equations. From the resonance conditions of electron energy, two distinguished systems with slowly varying or more slowly varying parameters can be identified. Also the gain rate of the signal field can be characterized into three limiting cases: very low gain, low gain, and high gain. It is a system of strictly nonlinear oscillators with slowly varying parameters and small perturbation terms.

Keywords: singular perturbation; nonlinear oscillators; free-electron lasers

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China