

文章编号: 0529-6579 (1999) 05-0009-03

微分代数方程的解维数^{*}

徐 希, 朱思铭

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 首先利用 Ritt 理论证明了任一微分代数多项式系统的通解可由有限个拟特征集的通解来描述, 然后提出解维数概念, 并讨论了几类微分代数方程 (包括多项式系统) 的解维数.

关键词: 微分代数方程; (拟) 特征集; 解维数

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A

本文讨论微分代数方程的通解问题, 首先证明了对微分代数多项式系统而言, 一般方程的通解可表为其有限个拟特征集的通解之交, 从而可将一般微分代数多项式方程组的求通解的问题转化为拟特征集的求通解问题. 然后对一般微分代数方程提出用以描述通解的解维数概念, 并讨论了多项式系统及其它几类微分代数方程的解维数.

设 A 为一由有限个多项式组成的微分多项式系统, 其系数为 x 的有理函数, $S(A)$ 为其在 $I \subset \mathbb{C}R$ 上的所有解之集, $I(A)$, $DI(A)$ 及 $PI(A)$ 分别为 A 生成的 (多项式) 理想, 微分理想和完备理想^[1], 则

$$A \subset I(A) \subset DI(A) \subset PI(A)$$

首先经简单证明有以下引理 1.

引理 1 $S(PI(A)) = S(DI(A)) = S(I(A)) = S(A)$

对 A 的任一特征集 Σ' 则有

$$S(A) \subset S(\Sigma')$$

以下即讨论理想 $PI(A)$. 由 Ritt 理论^[1] 可知任一完备理想可分解为若干个素理想之交, 故以下假定 $PI(A)$ 为素理想. 文^①曾利用吴方法将 A 转化为形如

$$G_i \triangleq I y_{i r_i}^{d_i} + g'_i = 0, i = 1, 2, \dots, s \quad (1)$$

的三角型系统, 其中 g'_i 均为级别低于 $y_{i r_i}^{d_i}$ 的多项式. 上式即 Ritt 意义下的特征集, 其中, y_i ($i = 1, 2, \dots, s$) 为主变元, 将其余的 y_i (若存在) 视为可变参数, 即 Ritt 意义下的参数集. 首先由 Ritt 理论^[1] 可知

引理 2 若系统 A 存在参数集, 则参数集的个数是一定的.

* 基金项目: 国家自然科学基金 (197710989) 资助项目

收稿日期: 1998-11-12 作者简介: 徐希, 1963 年生, 博士, 现在深圳大学理学院数学系工作.

① ZHU Siming, XU Xi. The existence and uniqueness of the solutions of DAEs. (C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

为了描述系统 A 的通解, 下面给出拟特征集的概念. 设 A 的参数集为 $u_1, \dots, u_q$, 主变元为 $y_1, \dots, y_p$.

定义 1 设 $A_1, \dots, A_p$ 为 $PI(A)$ 中的 p 个微分多项式, 若它们的类满足

$$CL(A_1) < CL(A_2) < \dots < CL(A_p)$$

则称 $A_1, \dots, A_p$ 为拟特征集.

显然特征集必为拟特征集, 反之不然. 又对任一拟特征集 Σ' 亦有

$$S(A) \subset S(\Sigma')$$

定理 1 $S(A) = \bigcap_{\Sigma' \subset PI(A)} S(\Sigma')$

其中, Σ' 为 $PI(A)$ 的任意拟特征集, 即对 $PI(A)$ 的全体拟特征集取交. 特别地, 存在有限个拟特征集 $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$, 使得

$$S(A) = \bigcap_{i=1}^r S(\Sigma_i)$$

证明 由于上式右端中所有多项式均在 $PI(A)$ 中, 故显然对 $PI(A)$ 的任一拟特征集 Σ' 有 $S(PI(A)) \subset S(\Sigma_i)$

因而 $S(PI(A)) \subset \bigcap_{\Sigma' \subset PI(A)} S(\Sigma')$

由引理 1 即得 $S(A) \subset \bigcap_{\Sigma \subset PI(A)} S(\Sigma')$

下面证明反过来的关系式. 设 P 为 A 中任一微分多项式, 必要时调换 $y_1, \dots, y_p$ 的次序, 不妨设 P 的类为 p , 当 $p = 1$ 时, p 就是 A 的 1 个特征集. 当 $p > 1$ 时, 设 Σ' 为 $PI(A)$ 中所有不含 y_p 的微分多项式 ($p > 1$ 时必存在) 所生成的理想, 显然有 $\Sigma' \subset PI(A)$. 利用文[2] 给出的方法, 设 $P_1, \dots, P_{p-1}$ 构成 Σ' 的 1 个特征集 (易知这样的特征集必是恰有 $p-1$ 个多项式), 则 $P_1, \dots, P_{p-1}, P$ 构成 $PI(A)$ 的 1 个拟特征集, 由此可对 A 中的每个多项式都构成 1 个拟特征集, 于是有 $S(A) \supset \bigcap_{i=1}^r S(\Sigma_i)$. 证毕.

文[3] 曾对一般微分代数方程 $F(t, x, x') = 0$ 引入可解性定义, 以下据此定义给出可解集及解维数概念. 首先利用通常的加上方程 $t' = 1$ 的方法将其转化为自治方程, 即讨论方程

$$F(x, x') = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (2)$$

定义 2 微分代数方程 (2) 的可解集 Ω 即使得到满足初值条件 $x(t_0) = c$ 的解存在唯一的 (文^① 所讨论的意义下) $c \in \mathbf{R}^n$ 的 c 之全体. Ω 的维数 r 称为方程 (2) 的解维数.

下面首先讨论线性常系数微分代数方程

$$Ax' = Bx = f \quad (3)$$

其中 A, B 是 $m \times m$ 常数矩阵. 由文[3] 知存在非奇异坐标变换将方程 (3) 化为

$$y_1' + Cy_1 = f_1 \quad (4)$$

$$Ny_2' + y_2 = f_2 \quad (5)$$

其中, $y_1 \in \mathbf{R}^s$, $y_2 \in \mathbf{R}^{m-s}$, N 是幂零矩阵. 易知方程 (4) 对任意初值均有唯一解, 而方程 (5) 仅有一解, 因而有

定理 2 线性常系数微分代数方程 (3) 的解维数为 s , 其中 s 为方程 (4) 中 y_1 的维数.

定理 3 设方程 (2) 是大小为 r 的 Hessenberg 形式, 即可写为如下形式:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & I & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & I \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{r-1} \\ x'_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & * & * & B_{1,r-1} & B_{1,r} \\ B_{21} & * & \cdots & B_{2,r-1} & 0 \\ 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_{r,r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{r-1} \\ f_r \end{bmatrix}$$

其中, $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $i = 1, 2, \cdots, r$, $B_{1,r-1}, B_{2,r-1}, \cdots, B_{r,r-1}$ 为非奇异矩阵, 则系统(6)的解维数为 $n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-1}$.

定理 4 设 $F(t, y, y') = 0$ 为一多项式系统, 且区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 内诸初式 I_i 及分离式 S_i 均不为零, 则其指标为零当且仅当其解维数为 n .

证明 必要性是显然的, 仅证充分性. 设其指标不为零, 则 $r(\partial F / \partial y') \neq 0$, 将其视为诸 y'_i 的代数方程, 设三角化后形式为(1), 其中 $T_i = 0$ 或 1, 且必有 i 使得 $T_i = 0$, 即为纯代数方程, 因而其解维数必小于 n , 矛盾. 证毕.

上面定理 1 的结论说明任一微分代数多项式系统的全部解可由有限个(拟)特征集的解来描述, 以下讨论(拟)特征集的通过给定初值条件^①的解的个数问题. 设系统(1)为 $PI(A)$ 的 1 个特征集, 其中, g'_i 均为其级别低于 $y_{iT_i}^{\#}$ 的多项式. 又设在区域 $I \times \Omega$ 内诸实 I_i 及分离式 S_i 均不为零.

定理 5 设每个 G_i 作为 y_{iT_i} 的代数多项式恰有 k_i 个实根, 则方程组(1)满足给定初值的解恰有 $k_1 k_2 \cdots k_s$ 个, 其解维数为 $T_1 + T_2 + \cdots + T_s$.

证明 先考虑其中第 1 式. 令

$$z_1 = y_1, z_2 = y_1', \cdots, z_{T_1-1} = y_{1T_1-1}, z_{T_1} = y_{1T_1} \quad (7)$$

由条件可在局部将 z_{T_1} 表为其余各元的 k_1 个连续函数, 且满足 Lipschitz 条件, 因而恰有 k_1 个解. 将此解代入第 2 个方程, 以下可类推.

注 虽然此时方程组给定的初值有多个解存在, 但文^①已指出, 该方程组的满足以上初值条件的解是存在唯一的.

参考文献:

- [1] RITT R F. Differential Algebra [J]. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 1950. 33.
- [2] 吴文俊. 初等微分几何的机械化证明 [M]. 中国科学数学专辑 (I), 1979. 94~102.
- [3] BRENNAN K G, CAMPBELL L, PETZOLD L R. Numerical solution of initial-value problems in differential algebraic equations [M]. Amsterdam: North-Holland, 1989. 16.

The Solution-dimensions of Differential-Algebraic Equations

XU Xi^{*}, ZHU Si-ming

Abstract: It is proved that the solutions of any system of DAE of polynomials are caps of the solutions of triangular polynomials. The concept of the solution-dimension of general DAEs is given, and the solution-dimensions of some DAEs are discussed.

Keywords: differential-algebraic equations; pseudo-characteristic set; solution-dimension