

文章编号: 0529-6579 (1999) 04-0120-03

Banach 空间一些凸性等价的条件^{*}

黎永锦

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 证明了若 X 是自反的强光滑空间, 则 X 是(HR) 当且仅当 X 是局部的一致凸的; 若 Banach 空间 X^* 具有 $(**)$ 性质, 则 X 是强凸的当且仅当 X 是局部的一致凸的.

关键词: 局部一致凸; 强凸; 非常凸; 严格凸; 中点局部一致凸

中图分类号: O 177.2 **文献标识码:** A

随着 Banach 空间凸性理论的发展, 各种各样的凸性^[1,2] 得到了深入的研究, 但在一般的 Banach 空间中, 各种凸性, 如局部一致凸, 中点局部一致凸和严格凸等空间的性质都是很不相同的, 它们在什么条件下等价也很难弄清楚. 不过在 Orlicz 函数空间, 这些凸性却在很弱的条件下就是等价的, 如在 L_M^* 中, 局部一致凸, 中点局部一致凸和严格凸都是等价的. 在本文中, 将讨论各种凸性在一般 Banach 空间等价的一些条件.

1 几种凸性的定义

定义 1^[1] Banach 空间 X 称为局部一致凸的, 如果对任意 $\epsilon > 0$, $x \in S(X)$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$, 使得当 $y \in S(X)$, 且 $\|(x+y)/2\| > 1 - \delta$ 时, 有 $\|x - y\| < \epsilon$.

定义 2^[2] Banach 空间 X 称为中点局部一致凸的, 如果对任意 $\epsilon > 0$, $x \in S(X)$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in S(X)$, $\|x - (x_1 + x_2)/2\| < \delta$ 时, 有 $\|x_1 - x_2\| < \epsilon$.

定义 3^[3] Banach 空间 X 称为强凸的, 如果对任何 $x \in S(X)$, 当 $x_n \in S(X)$, $f_x(x_n) \rightarrow 1$ 对某个 $f_x \in A_x$ 成立时, 一定有 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

定义 4^[4] Banach 空间 X 称为非常凸的, 若对任意 $x \in S(X)$, $x_n \in S(X)$, 当 $f_x(x_n) \rightarrow f_x(x) = 1$ 对某个 $f_x \in A_x$ 成立时, 一定有 $x_n \xrightarrow{w} x$.

定义 5^[2] Banach 空间 X 称为严格凸的或 (R) , 若任意 $x \in S(X)$ 都是 $U(X)$ 的端点.

2 有关凸性等价的一些定理

Banach 空间具有(H) 性质是指单位球面上序列的范数收敛与 w -收敛是一致的, 若严格凸空间 X 还具有(H) 性质, 则称 X 是(HR) 的. 关于(HR) 和局部一致有如下的定理.

定理 1 若 X 是自反的强光滑空间, 则 X 是(HR) 等价于 X 是局部一致凸.

证明 由于局部一致凸空间是严格凸的并具有(H) 性质, 因此只须证若 Banach 空间 X 具有(H) 性质, 且严格凸, 则 X 一定是局部一致凸的. 如果 $x \in S(X)$, $x_n \in S(X)$, 且 $\|x_n +$

* 收稿日期: 1998-10-05

作者简介: 黎永锦, 男, 1963 年生, 副教授.

$x \parallel \rightarrow 2$, 则由 Hahn-Banach 定理有 $f_n \in X^*$, $\|f_n\| = 1$, 使得 $f_n(x_n + x) = \|x_n + x\|$. 由于 $|f_n(x_n)| \leq \|f_n\| \cdot \|x_n\| = 1$, $|f_n(x)| \leq \|f_n\| \cdot \|x\| = 1$, 因此 $\{f_n(x_n)\}$ 和 $\{f_n(x)\}$ 都是有界序列, 从而可以选出子序列 $\{f_{n_i}\} \subset \{f_n\}$, 使得序列 $\{f_{n_i}(x_{n_i})\}$ 和 $\{f_{n_i}(x)\}$ 都收敛. 由 $f_n(x_n) \leq 1$, $f_n(x) \leq 1$ 及 $f_n(x_n + x) = \|x_n + x\| \rightarrow 1$ 可知 $f_{n_i}(x_{n_i}) \rightarrow 1$ 且 $f_{n_i}(x) \rightarrow 1$. 由于 X 是强光滑的, 因此由 $f_{n_i}(x) \rightarrow 1$ 可知 $\{f_{n_i}\}$ 是收敛序列, 设 $f_{n_i} \rightarrow f_0$, 则 $f_0(x) = 1$ 且 $\|f_0\| = 1$, 并由 $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x_{n_i}) = 1$ 可知 $\lim_{i \rightarrow \infty} f_0(x_{n_i}) = 1$. 由于 X 是自反 Banach 空间, 因此有子序列 $\{x_{n_{i_k}}\} \subset \{x_{n_i}\}$, 使得 $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{w} x'$, 由 $\lim_{i \rightarrow \infty} f_0(x_{n_i}) = f_0(x) = 1$ 可知 $f_0(x) = f_0(x') = 1$, 又由于 X 是严格凸的, 因而 $x = x'$, 因此有 $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{w} x$, 由 X 具有 (H) 性质可得 $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{w} x$, 从而 $x_n \rightarrow x$, 所以 Banach 空间 X 是局部一致凸的.

从上面定理证明, 不难看出下面定理成立.

定理 2 若 Banach 空间 X 是自反的, 且 X 是强光滑的, 则:

X 是严格凸的等价于 X 是弱局部一致凸的.

由强光滑的性质, 还可得到以下的推论.

推论 3 若 X 和 X^* 都是强光滑的, 则:

X 是严格凸的等价于 X 是局部一致凸的.

在 Orlicz 空间 $L_{(M)}^*$ 中, 局部一致凸的, 中点局部一致凸和严格凸等都是等价的. 在这里, 本文亦得到 Banach 空间的这些凸性等价的一个条件.

定理 4 若 X 是自反 Banach 空间, 且 X 和 X^* 具有 (H) 性质, 则下述命题等价:

- (1) X 是严格凸的;
- (2) X 是中点局部一致凸的;
- (3) X 是强凸的;
- (4) X 是非常凸的;
- (5) X 是弱局部一致凸的;
- (6) X 是局部一致凸的.

证明 明显地, 只须证明 (1) $\Rightarrow$ (6) 成立. 如果 $x \in S(X)$, $x_n \in S(X)$, 且 $\|x_n + x\| \rightarrow 2$, 则存在 $f_n \in S(X^*)$, 使得 $f_n(x_n + x) = \|x_n + x\|$, 既然 $f_n(x_n) \leq 1$, $f_n(x) \leq 1$, 不失一般性, 可以假设 $f_n(x_n) \rightarrow 1$ 和 $f_n(x) \rightarrow 1$. 由于 X 是自反的, 因此 X^* 也是自反的, 故有 $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, 使得 $f_{n_k} \xrightarrow{w} f$, 由 $f_n(x) \rightarrow 1$ 可知 $f(x) = 1$, 因而 $\|f\| = 1$, 但 X^* 具有性质 (H), 故 $f_{n_k} \rightarrow f$, 且 $f(x_{n_k}) \rightarrow 1$, 由于 X 是自反的, 且 X 严格凸, 并且具有 (H) 性质, 因此有 $x_{n_{i_k}} \rightarrow x$, 所以 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, 即 X 是局部一致凸的.

如果将上面定理的条件减弱, 则可得到严格凸和中点局部一致凸等价的一个条件.

定理 5 若 X 是自反 Banach 空间, 且具有 (H) 性质, 则下述命题等价:

- (1) X 是强凸的;
- (2) X 是非常凸的;
- (3) X 是中点局部一致凸;
- (4) X 是严格凸的.

证明 由于 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4), 且 (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), 因此只须证明 (4) $\Rightarrow$ (1). 若 $x \in S(X)$,

$x_n \in S(X)$, $f_x \in A_x$, 且 $f_x(x_n) \rightarrow f_x(x) = 1$, 则由于 Banach 空间 X 是自反的, 因此 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x'$, 故 $f_x(x') = f_x(x) = 1$, 由 Banach 空间 X 是严格凸的可知 $x = x'$, 又由 X 具有 (H) 性质可知 $x_{n_k} \rightarrow x$, 因此 $x_n \rightarrow x$, 所以 Banach 空间 X 是强凸的.

我们回想 X^* 具有性质 $(**)$ 是指 X^* 的单位球面 $S(X^*)$ 的 w^* 拓扑和范数拓扑是一样的. 对于局部一致凸和强凸性, 有如下定理.

定理 6 若 Banach 空间 X^* 具有 $(**)$ 性质, X 是强凸的等价于 X 是局部一致凸的.

对于 X^* 的凸性, 还有如下的结果.

定理 7 若 X 是 Banach 空间, 则 X^* 是 w^* MLUR 等价于 X^* 是严格凸的.

从上面的定理, 不难看出下面定理成立.

定理 8 若 X^* 具有 $(**)$ 性质, 则 X^* 是严格凸的等价于 X^* 是中点局部一致凸的.

参考文献:

- [1] ISTRATEXCU V. Strict convexity and complex strict convexity: theory and application [M]. New York: Dekker, 1984. 136~240.
- [2] DIESTEL J. Geometry of Banach space-select topics [M]. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1975. 15~63.
- [3] WU C X, LI Y J. Strong convexity in Banach spaces [J]. 数学杂志, 1993, 12: 599~602.
- [4] 黎永锦. Banach 空间凸性和光滑性的若干问题 [学位论文, D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 1992.
- [5] TAN K K, XU H K. Fixed point iteration processes for asymptotically nonexpansive mappings [J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 122: 733~739.

Some Conditions Related to the Equivalence of Convexities in Banach Space

LI Yong-jin^{*}

Abstract: It is proved that if X is a reflexive and strongly smooth Banach space, the Banach space X is (HR) if and only if X is locally uniformly convex. If X^* has $(**)$ property, the Banach space X is strongly convex if and only if X is locally uniformly convex.

Keywords: locally uniformly convex; strongly convex; very convex; strictly convex; midpoint locally uniformly convex

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China