

文章编号: 0529-6579 (1999) 04-0006-05

## 二阶线性微分方程的振动准则<sup>\*</sup>

彭世国<sup>1</sup>, 朱思铭<sup>2</sup>

(1. 广东工业大学数理系, 广州 510090; 2. 中山大学数学系)

**摘 要:** 讨论二阶线性微分方程  $(r(t)x')' + p(t)x' + q(t)x = 0$  的振动性, 利用 Riccati 方程的形式特点, 结合积分平均技巧, 得到了新的判别准则, 推广并改进了以往的若干结果.

**关键词:** 二阶; 线性微分方程; 振动性

**中图分类号:** O 175.7 **文献标识码:** A

二阶线性微分方程的振动性的研究自从 Sturm 定理建立以来得到了很大的发展. 对于不含阻尼项的方程

$$x'' + q(t)x = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (1)$$

已有若干重要的结果, 例如

$$(I) \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t q(s)ds = \infty \quad (\text{Wintner}^{[1]})$$

$$(II) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t Q(s)ds = \infty \quad (\text{Wintner}^{[1]})$$

$$(III) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t Q(s)ds = C_0 > -\infty \text{ 且 } \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t Q^2(s)ds = \infty \quad (\text{Bulter 等}^{[2]})$$

$$(IV) \text{ 存在 } \alpha > 1, \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} Q(s)ds = \infty \quad (\text{Kamenev}^{[3]})$$

最近, James S. W. Wong 考虑含有阻尼项的微分方程

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (2)$$

将 (I) ~ (IV) 中的  $Q(t)$  用  $F(t) = \int_{t_0}^t q(s)ds - \frac{p(t)}{2} - \int_{t_0}^t \frac{p^2(s)}{4}ds$  替换, 得到了方程 (2) 的振动准则.

但是, 对于与方程 (1)、(2) 的一些类型相同的方程, 尽管它们是振动的, 却不能用文 [1 ~ 3] 的结果进行判断, 已知的其它结果亦不能运用. 为此本文利用 Riccati 方程的特点, 结合积分平均和完全平方技术, 给出一些新的判别准则. 下面考虑比方程 (1)、(2) 更广泛的方程

$$(r(t)x')' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (3)$$

\* 基金项目: 国家自然科学基金 (19771089) 资助项目; 国家教委博士点基金 (9355810) 资助项目

收稿日期: 1999-01-03 作者简介: 彭世国, 男, 1967 年生, 博士, 讲师.

的振动性, 其中  $r(t) \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$ ,  $p(t), q(t) \in C([t_0, \infty), (-\infty, \infty))$ , 推广并改进了文[1~3] 中的结果.

本文中, 总假设方程(3) 的解均定义在  $[t_0, \infty)$  上并且是连续的. 方程(3) 的非平凡解是振动的, 如果它的零点集合是无界的; 方程(3) 是振动的, 如果方程(3) 的所有非平凡解都是振动的.

下文对连续可微函数  $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ , 令

$$S(t) = \int_{t_0}^t \rho(s)q(s)ds - \frac{\rho(t)p(t) - \rho'(t)r(t)}{2} - \int_{t_0}^t \frac{(\rho(s)p(s) - \rho'(s)r(s))^2}{4\rho(s)r(s)}ds$$

## 1 主要结果

**定理** 假设存在连续可微函数  $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ , 使得如下条件之一满足, 则方程(3) 振动.

$$1) \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\rho(t)r(t)}dt = \infty \text{ 且 } \int_{t_0}^{\infty} S(t)dt = \infty;$$

$$2) r(t)\rho(t) \text{ 有界, 且 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S(s)ds = \infty;$$

$$3) r(t)\rho(t) \text{ 无界且单调不减, } \int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{sr(s)\rho(s)} = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S(s)ds = \infty;$$

$$4) r(t)\rho(t) \text{ 有界, } \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S(s)ds = C_1 > -\infty, \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S^2(s)ds = \infty;$$

$$5) r(t)\rho(t) \text{ 无界且单调不减, } \int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{sr(s)\rho(s)} = \infty, \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho(r)r(t)}{t} < \infty,$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S(s)ds = C_1 > -\infty, \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S^2(s)ds = \infty;$$

$$6) \text{ 存在常数 } \alpha > 1, \text{ 使 } \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-2} r(s)\rho(s)ds < \infty, \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} S(s)ds = \infty.$$

**证明** 假设方程(3) 不振动, 不妨设  $x(t)$  是一非振动解, 令  $u = \rho(r)r(t)x'/x$ , 由方程(3),  $u$  满足如下的 Riccati 方程

$$u' + \frac{u^2}{r\rho} + \frac{(p\rho - \rho'r)u}{r\rho} + \rho q = 0 \quad (4)$$

对方程(4) 两边积分得

$$u(t) + \int_{t_0}^t \frac{u^2(s)}{\rho(s)r(s)}ds + \int_{t_0}^t \frac{(p(s)\rho(s) - \rho'(s)r(s))u(s)}{r(s)\rho(s)}ds + \int_{t_0}^t \rho(s)q(s)ds = u(t_0) \quad (5)$$

令  $w(t) = u(t) + \frac{p(t)\rho(t) - \rho'(t)r(t)}{2}$ , 则(5) 式可写为

$$w(t) + \int_{t_0}^t \frac{w^2(s)}{\rho(s)r(s)}ds + S(t) = u(t_0) = u_0 \quad (6)$$

假设条件 1) 满足, 由于  $\int_{t_0}^{\infty} S(t)dt = \infty$ , 故可选取  $t_1$  充分大, 使

$$w(t) + \int_{t_0}^t \frac{w^2(s)}{r(s)\rho(s)} ds \leq 0, \quad t \geq t_1 \quad (7)$$

记  $\Phi(t) = \int_{t_0}^t \frac{w^2(s)}{r(s)\rho(s)} ds$ , 则  $w^2(t) = r(t)\rho(t)\Phi'(t)$ , 由(7) 式得  $\frac{1}{r(t)\rho(t)} \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi^2(t)}$ , 从而  $\int_{t_0}^t \frac{ds}{r(s)\rho(s)} \leq \frac{1}{\Phi(t_1)} - \frac{1}{\Phi(t)} \leq \frac{1}{\Phi(t_1)}$ , 而  $\int_{t_0}^\infty \frac{dt}{\rho(t)r(t)} = \infty$ , 矛盾, 故方程(3) 振动.

假设条件 2) 或 3) 满足, 由等式(6) 得

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t w(s) ds = \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Phi(s) ds + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S(s) ds = u_0 \left[ 1 - \frac{t_0}{t} \right] \leq K_0, \quad K_0 > 0 \quad (8)$$

由  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S(s) ds = \infty$  知, 存在  $t_1 \geq t_0$ , 使  $\frac{1}{t} \int_{t_0}^t w(s) ds \leq -\frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Phi(s) ds, t \geq t_1$ . 由 Schwartz 不等式可得

$$\frac{1}{t^2} \left[ \int_{t_0}^t \Phi(s) ds \right]^2 \leq \frac{1}{t^2} \left[ \int_{t_0}^t w(s) ds \right]^2 \leq \frac{1}{t} \int_{t_0}^t w^2(s) ds = \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \rho(s)r(s)\Phi'(s) ds \quad (9)$$

记  $H(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s) ds$ , 若  $r(t)\rho(t)$  有界, 则  $\frac{1}{t} H^2(t) \leq c \int_{t_0}^t \Phi'(s) ds \leq c\Phi(t) = cH'(t)$

( $c > 0$ ), 从而可得  $\ln t - \ln t_1 \leq \frac{1}{H(t_1)} - \frac{1}{H(t)} \leq \frac{1}{H(t_1)}$ , 由此导出矛盾; 若  $r(t)\rho(t)$  无界且单调不减, 由(9) 式可得

$$\frac{1}{t} H^2(t) \leq \rho(t)r(t) \int_{t_0}^t \Phi'(s) ds \leq \rho(t)r(t) H'(t)$$

由  $\int_{t_0}^\infty \frac{ds}{sr(s)\rho(s)} = \infty$ , 可导出矛盾, 故方程(3) 振动.

假设条件 4) 或 5) 满足, 由  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S(s) ds = C_1 > -\infty$  及不等式(8) 可知存在常数  $K_1$  及  $t_2 \geq t_0$  使

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t w(s) ds + \frac{1}{t} H(t) \leq K_1, \quad t \geq t_2 \quad (10)$$

若  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t)/t = \infty$ , 于是当  $t$  充分大时有  $\int_{t_0}^t w(s) ds \leq 0$ , 由 Schwartz 不等

式有  $-\frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\int_{t_0}^t w^2(s) ds} \leq \frac{1}{t} \int_{t_0}^t w(s) ds$ , 由不等式(10) 得

$$-\frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\int_{t_0}^t w^2(s) ds} + \frac{1}{t} H(t) \leq K_1, \quad t \geq t_2 \quad (11)$$

选取  $t_3 \geq t_0$  使得  $\frac{H(t)}{t} - K_1 \geq \frac{H(t)}{2t}, t \geq t_3$ , 由不等式(11) 可得

$$\frac{1}{4t} H^2(t) \leq \int_{t_0}^t w^2(s) ds = \int_{t_0}^t \Phi'(s)\rho(s)r(s) ds, \quad t \geq t_3 \quad (12)$$

若  $r(t)\rho(t)$  有界, 则  $\frac{1}{4t} H^2(t) \leq c \int_{t_0}^t \Phi'(s) ds \leq c\Phi(t) = cH'(t)$ , 矛盾; 若  $r(t)\rho(t)$  无界且

单调不减, 且  $\int_{t_0}^\infty \frac{ds}{sr(s)\rho(s)} = \infty$ , 则  $\frac{1}{4t\rho(t)r(t)} H^2(t) \leq \int_{t_0}^t \Phi'(s) ds \leq H'(t)$ , 亦导出矛盾,

故  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = m < \infty$ , 由方程(6),  $S^2(t) = (u_0 - w(t) - \Phi(t))^2 \leq 3(u_0^2 + w^2(t) + \Phi^2(t))$ ,

$$\text{故} \quad \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S^2(s) ds \leq 3 \left[ u_0^2 + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \rho(s) r(s) \Phi'(s) ds + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Phi^2(s) ds \right] \quad (13)$$

若  $r(t)\rho(t)$  有界, 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S^2(s) ds \leq 3(u_0^2 + m^2) < \infty$$

矛盾; 若条件4) 满足, 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t S^2(s) ds \leq 3(u_0^2 + m^2 + m \limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(t)r(t)/t) < \infty$$

矛盾. 故方程(3) 振动.

最后, 假设条件6) 满足, 将(6) 式两边同乘以  $(t-s)^{\alpha-1}$  并积分得

$$\frac{1}{t^\alpha} \left\{ \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} w(s) ds + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} \Phi(s) ds + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} S(s) ds \right\} \leq \alpha^{-1} K_0 \quad (14)$$

由分部积分可得

$$\frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} \Phi(s) ds = \frac{1}{\alpha} \Phi(t_0) \left( 1 - \frac{t_0}{t} \right)^\alpha + \frac{1}{\alpha t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^\alpha \frac{w^2(s)}{\rho(s)r(s)} ds \quad (15)$$

$$\frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t \left[ (t-s)^{\alpha-1} w(s) + (t-s)^\alpha \frac{w^2(s)}{\rho(s)r(s)} \right] ds =$$

$$\frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^\alpha \left[ \frac{w(s)}{\sqrt{\rho(s)r(s)}} + \frac{\sqrt{\rho(s)r(s)}}{2(t-s)} \right]^2 ds - \frac{\alpha}{4t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-2} \rho(s)r(s) ds \quad (16)$$

将(15) 式和(16) 式代入不等式(14) 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} S(s) ds \leq \frac{1}{\alpha} [\Phi(t_0) + K_0] + \frac{1}{4} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-2} \rho(s)r(s) ds < \infty$$

矛盾, 故方程(3) 振动.

注1 在定理中, 令  $\rho(t) = r(t) = 1$ , 则得 Wong 的结果, 令  $\rho(t) = r(t) = 1$ ,  $p(t) = 0$ , 则得结果(I) ~ (IV).

通过选择适当的函数  $\rho(t)$ , 还可以得到许多有效的判别准则.

推论1 对于方程(1), 将结果(I) ~ (IV) 中的  $Q(t) = \int_{t_0}^t q(s) ds$  换成

$$G(t) = \int_{t_0}^t (\ln s)^\beta q(s) ds, \beta \in [0, 1], \text{ 则方程(1) 是振动的.}$$

证明 取  $\rho(t) = (\ln t)^\beta$ ,  $S(t) = G(t) + \frac{\beta}{2t(\ln t)^{1-\beta}} - \int_{t_0}^t \frac{\beta^2}{4s^2(\ln s)^{3-2\beta}} ds$ , 容易验证定理中的条件1)、3)、5)、6) 均成立.

选取  $\rho(t) = t^k$ ,  $k \in [0, 1]$ , 可得推论2.

推论2 对方程(1), 将结果(I)、(IV) 中的  $Q(t)$  换成  $C(t) = \int_{t_0}^t s^k q(s) ds$ , 则方程(1)

振动.

考虑方程(3), 若取  $\rho(t) = \exp\left[\int_{t_0}^t \frac{\rho(s)}{r(s)} ds\right]$ , 则  $S(t) = \int_{t_0}^t q(s) \exp\left[\int_{t_0}^s \frac{\rho(\tau)}{r(\tau)} d\tau\right] ds$ , 于是由定理的条件 6) 可得如下的结果.

推论 3 对方程(3), 若有  $\alpha > 1$ , 使

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} \int_{t_0}^s q(\zeta) \exp\left[\int_{t_0}^\zeta \frac{\rho(\tau)}{r(\tau)} d\tau\right] d\zeta ds = \infty$$

且 
$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-2} r(s) \exp\left[\int_{t_0}^s \frac{\rho(\tau)}{r(\tau)} d\tau\right] ds < \infty$$

则方程(3) 振动.

注 2 推论 1 与推论 2 改进了文[1~3] 中的结果, 在推论 3 中取  $r(t) = 1$ ,  $p(t) = 0$  即得结果(IV).

例 1  $x'' + (at^\lambda \sin t)x' + (bt^\mu \cos t)x = 0 (t \geq t_0 > 0)$  是振动的, 其中,  $a, b \neq 0$ ,  $\lambda < -3/4$ ,  $\mu > 1/2$ .

证明 当  $\mu > 1$  时, 由 Wong 的结果可知方程振动, 当  $1/2 < \mu \leq 1$ , Wong 的准则是无效的, 此时取  $\rho(t) = \sqrt{t}$ , 由定理条件 6) 易知方程振动.

例 2  $x'' - (\sin t)x' + (\cos t)x = 0, (t \geq 0)$  是振动的.

证明 取  $\rho(t) = \exp\left[-\int_0^t \sin s ds\right] = \exp(\cos t - 1)$ ,  $S(t) = \int_0^t \cos y \exp(\cos y - 1) dy$ , 由定理的条件 1)、2)、4)、6) 均可推出  $x'' - (\sin t)x' + (\cos t)x = 0$  振动.

参考文献:

- [1] WINNER A. A criterion of oscillatory stability [J]. Quart J Appl Math, 1949 (7): 115~117.
- [2] BUTER G J, ERBE L H, MINGARELLI A B. Riccati techniques and variational principles in oscillation theory for linear systems [J]. Trans Amer Math Soc, 1987, 303: 263~282.
- [3] KAMENEV I V. Integral criterion for oscillations of differential equations of second order [J]. Math Zametki, 1978, 23: 249~251.

## Oscillation Criteria for Second Order Linear Differential Equations

PENG Shi-guo<sup>\*</sup>, ZHU Si-ming

**Abstract:** By using the form of Riccati's equation and combining it with the technique of integral averages, oscillation criteria for second order differential equations  $(r(t)x')' + p(t)x' + q(t)x = 0$  are obtained. The results are generalizations and improvements of earlier results.

**Keywords:** second order; linear differential equations; oscillation

<sup>\*</sup> Department of Mathematics and Physics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China