

文章编号: 0529-6579 (1999) 04-0001-05

无界停时带跳倒向随机微分方程 解的存在唯一性 (II)^{*}

司徒荣, 曾爱婷

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 进一步研究了以无界停时为终端的带跳倒向随机微分方程在非李氏条件下解的存在唯一性, 并得到解的收敛定理. 还举例说明, 即使在有限区间情形, $0 \leq c_1(t)$ 为可积, $0 \leq c_2(t)$ 为平方可积之条件, 也是不可以减弱的.

关键词: 倒向随机微分方程 (BSDE), Ito 公式, 非李氏条件, 收敛定理, 停时

中图分类号: O 241.8 **文献标识码:** A

考虑 $\mathbf{R}^d$ 中的 BSDE:

$$x_t = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s(z) N_k(ds dz), t \geq 0 \quad (1)$$

其中, 有关符号的定义及假设条件 (H1), (H2) 见文[1].

1 非李氏条件下解的存在唯一性定理

定理 1 设 (H1), (H2) 成立, 且

① $b = b_1 + b_2, b_i = b_i(t, x, q, p, \omega): [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \otimes r} \times L^2_{\mathcal{F}(\cdot)}(\mathbf{R}^d) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d, i = 1, 2$ 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的可测过程, 使得 P-a. s. 有 $|b_1(t, x, q, p, \omega)| \leq c_0(t), |b_2(t, x, q, p, \omega)| \leq c_1(t)(1 + |x|) + c_2(t)(\|q\| + \|p\|)$, 其中, $c_3^0 = \int_0^\infty c_0(t) dt < \infty$;

② $\forall x_i \in \mathbf{R}^d, q_i \in \mathbf{R}^{d \otimes r}, p_i \in L^2_{\mathcal{F}(\cdot)}(\mathbf{R}^d), (i = 1, 2), \langle x_1 - x_2, b_1(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b_1(t, x_2, q_2, p_2, \omega) \rangle \leq c_1(t) \rho(|x_1 - x_2|^2) + c_2(t) |x_1 - x_2| (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|),$
 $|b_1(t, x, q_1, p_1, \omega) - b_1(t, x, q_2, p_2, \omega)| \leq c_2(t) (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|),$
 $|b_2(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b_2(t, x_2, q_2, p_2, \omega)| \leq c_1(t) |x_1 - x_2| + c_2(t) (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|);$

③ $b(t, x, q, p, \omega)$ 关于 $(x, q, p) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \otimes r} \times L^2_{\mathcal{F}(\cdot)}(\mathbf{R}^d)$ 是连续的;

④ X 是 $\mathcal{F}_\tau$ 可测的, 且 $E|X|^2 < \infty$.

则方程 (1) 存在唯一解 (x_t, q_t, p_t) .

* 基金项目: 国家自然科学基金重大 (79790130) 资助项目; 中山大学前沿研究基金资助项目

收稿日期: 1998-09-22 作者简介: 司徒荣, 男, 1935 年生, 教授, 博士生导师.

证明 不妨设 $b_2 = 0$ (否则, 因 b_2 已满足李氏条件, 故仍只光滑化 b_1 , 再作同样讨论).

$$\forall u \in \mathbf{R}^d, \text{ 记 } J_d(u) = \begin{cases} c_d \exp\left\{-\left(1 - |u|^2\right)^{-1}\right\} & \text{当 } |u| < 1 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |u| \geq 1 \text{ 时} \end{cases}$$

其中, 常数 c_d 满足 $\int_{\mathbf{R}^d} J_d(u) du = 1$. 定义

$$b^n(t, x, q, p, \omega) = \int_{\mathbf{R}^d} b\left(t, x - \frac{\bar{x}}{n}, q, p, \omega\right) J_d(\bar{x}) d\bar{x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

对 $(x_i, q_i, p_i) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \otimes r} \times \dot{\mathbf{H}}^{(\cdot)}(\mathbf{R}^d)$, $i = 1, 2$, 有

$$\begin{aligned} & |b^n(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b^n(t, x_2, q_2, p_2, \omega)| \leq c_2(t)(\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|) + \\ & n \int_{\mathbf{R}^d} |b(t, x, q_2, p_2)| |J_d(n(x_1 - x)) - J_d(n(x_2 - x))| dx \leq \\ & k_n [c_0(t) |x_1 - x_2| + c_2(t)(\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|)]. \end{aligned}$$

故由文[1]定理2, 存在唯一解 $(x_t^n, q_t^n, p_t^n) \in H$, $n = 1, 2, \dots$, 满足

$$x_t^n = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s^n dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_{\mathbf{R}^d} p_s^n(z) N_k(ds dz), \quad t \geq 0 \quad (1)_n$$

记 $x_t^{n,m} = x_t^n - x_t^m$ etc. $b_t^{n,m} = b^n(t, x_t^n, q_t^n, p_t^n, \omega) - b^m(t, x_t^m, q_t^m, p_t^m, \omega)$. 由 Ito 公式得

$$Y_t \triangleq E \left[|x_{t \wedge \tau}^{n,m}|^2 + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \|q_s^{n,m}\|^2 ds + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \|p_s^{n,m}\|^2 ds \right] = E \left[2 \int_{t \wedge \tau}^{\tau} x_s^{n,m} b_s^{n,m} ds \right] \triangleq E(I)$$

用文[2]定理1的类似方法可得

$$\begin{aligned} I & \leq \int_t^\infty \int_{\mathbf{R}^d} [\rho(2E|x_s^{n,m}|^2 + 2|n^{-1} - m^{-1}|^2 |\bar{x}|^2) + E|x_s^{n,m}|^2] J_d(\bar{x}) d\bar{x} c_3(s) ds + \\ & k(n^{-1} + m^{-1}). \end{aligned}$$

其中, $c_3(s) = k(c_1(s) + c_2(s)^2)$, k 为某一足够大的常数. 由引理1, 得

$$\int_{\mathbf{R}^d} \rho(2E|x_s^{n,m}|^2 + 2|n^{-1} - m^{-1}|^2 |\bar{x}|^2) J_d(\bar{x}) d\bar{x} \leq \rho(2k_0 + 2) < \infty$$

记 $\rho_1(u) = \rho(u) + u$, 由法都定理

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} Y_t \leq \int_t^\infty [\rho(2 \lim_{n, m \rightarrow \infty} E|x_s^{n,m}|^2) + \lim_{n, m \rightarrow \infty} E|x_s^{n,m}|^2] c_3(s) ds \leq \int_t^\infty \rho_1(2 \lim_{n, m \rightarrow \infty} Y_s) c_3(s) ds$$

因而 $\lim_{n, m \rightarrow \infty} Y_t = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$

再由 Ito 公式可得

$$\begin{aligned} & E \sup_{t \leq \tau} |x_t^{n,m}|^2 \leq \\ & \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^d} [\rho(2E|x_s^{n,m}|^2 + 2|n^{-1} - m^{-1}|^2 |\bar{x}|^2) + E|x_s^{n,m}|^2] J_d(\bar{x}) d\bar{x} c_3(s) ds + \\ & E|x_0^{n,m}|^2 + k(n^{-1} + m^{-1}) + 2E \int_0^\tau (\|q_s^{n,m}\|^2 + \|p_s^{n,m}\|^2) ds + 2E \sup_{t \leq \tau} \int_0^{t \wedge \tau} x_s^{n,m} q_s^{n,m} dw_s + \\ & 2E \sup_{t \leq \tau} \int_0^{t \wedge \tau} \int_{\mathbf{R}^d} x_s^{n,m} p_s^{n,m} N_k(ds dz) \triangleq \sum_{i=1}^6 I^i(n, m) \end{aligned} \quad (3)$$

由控制收敛定理及等式(2), 对于 $i = 2, 3, 4, \lim_{n, m \rightarrow \infty} I^i(n, m) = 0$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} I^1(n, m) \leq \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^d} [\rho_1(2 \lim_{n, m \rightarrow \infty} E|x_s^{n,m}|^2)] J_d(\bar{x}) d\bar{x} c_3(s) ds = 0,$$

由鞅不等式得

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} I^5(n, m) \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \left[2 \lim_{T \rightarrow \infty} E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau} x_s^{n, m} q_s^{n, m} dw_s \right| \right] \leq 2^{-1} \lim_{n, m \rightarrow \infty} E \sup_{t \geq 0} |x_t^{n, m}|^2,$$

同理可得 $\lim_{n, m \rightarrow \infty} I^6(n, m) \leq 4^{-1} \lim_{n, m \rightarrow \infty} E \sup_{t \geq 0} |x_t^{n, m}|^2$. 故由不等式(3) 得

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} E \sup_{t \geq 0} |x_t^{n, m} - x_t^{m, m}|^2 = 0 \quad (4)$$

由式(2), (4) 及 H 的完备性知存在 $(x_t, q_t, p_t) \in H$, 使得: (必要时取子列)

$$\begin{aligned} x_t^n(\omega) &\rightarrow x_t(\omega), & \text{在 } \mathbf{R}^d \text{ 中}; & p_t^n(\omega) \rightarrow p_t(\omega), & \text{在 } L^2(\cdot, \mathbf{R}^d) \text{ 中}; \\ q_t^n(\omega) &\rightarrow q_t(\omega), & \text{在 } \mathbf{R}^{d \otimes r} \text{ 中}, & \mu - \text{a.e. } (t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega \end{aligned}$$

又由条件③中 $b(s, x, q, p, \omega)$ 关于 (x, q, p) 的连续性 & 控制收敛定理, 有

$$\begin{aligned} |b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) - b(s, x_s, q_s, p_s, \omega)| &\leq \\ \int_{\mathbf{R}^d} |b(s, x_s^n - \bar{x} \circ n^{-1}, q_s^n, p_s^n, \omega) - b(s, x_s, q_s, p_s, \omega)| J_d(\bar{x}) d\bar{x} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

因而在(1)_n 式中, 令 $n \rightarrow \infty$, 可得 (x_t, q_t, p_t) 是(1) 的解. 解的唯一性由文[1] 定理 1 推出.

2 解的极限定理

定理 2 设 τ 为 $\mathcal{H}$ 停时, (H1), (H2) 成立, 且对 $n = 0, 1, 2, \dots$

① $b^n(t, x, q, p, \omega): [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \otimes r} \times L^2(\cdot, \mathbf{R}^d) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的, 且 $P - \text{a.s.}$

有 $\langle x, b^n(t, x, q, p, \omega) \rangle \leq c_1(t) |x| (1 + |x|) + c_2(t) |x| (\|q\| + \|p\|);$

② $\forall (x_i, q_i, p_i) \in D \triangleq \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \otimes r} \times L^2(\cdot, \mathbf{R}^d), i = 1, 2, P - \text{a.s.}$

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, b^0(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b^0(t, x_2, q_2, p_2, \omega) \rangle &\leq \\ c_1(t) \rho(|x_1 - x_2|^2) + c_2(t) |x_1 - x_2| (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|); \end{aligned}$$

③ $X^n \in \mathcal{F}_\tau$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} E |X^n - X^0|^2 = 0, E |X^n|^2 < \infty;$

④ 存在 $k > 0$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(x, q, p) \in D \\ \omega \in \Omega}} \int_0^\tau |b^n(t, x, q, p, \omega) - b^0(t, x, q, p, \omega)|^2 e^{kt} dt \triangleq$

$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$. 若 $(x_t^n, q_t^n, p_t^n), n = 0, 1, 2, \dots$ 是下面 BSDE 的解

$$x_t^{n, \tau} = X^n + \int_{t \wedge \tau}^\tau b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) ds - \int_{t \wedge \tau}^\tau q_s^n dw_s - \int_{t \wedge \tau}^\tau p_s^n(z) N_k(ds dz), t \geq 0.$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sup_{t \geq 0} |x_t^{n, \tau} - x_t^{0, \tau}|^2 + \int_0^\tau (\|q_s^n - q_s^0\|^2 + \|p_s^n - p_s^0\|^2) ds \right] = 0 \quad (5)$$

证明 记 $x_t^n = x_t^n - x_t^0$, etc. $b_t^n = b^n(t, x_t^n, q_t^n, p_t^n, \omega) - b^0(t, x_t^0, q_t^0, p_t^0, \omega)$.

$$\begin{aligned} \text{因 } 2x_s^n b_s^n &= 2(x_s^n - x_s^0) \left\{ b^0(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) - b^0(s, x_s^0, q_s^0, p_s^0, \omega) \right\} + \\ &2(x_s^n - x_s^0) \left\{ b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) - b^0(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) \right\} \leq \\ &4 \left[c_1(s) + c_2(s)^2 + e^{-ks} \right] \rho_1(|x_s^n|^2) + 2^{-1} (\|q_s^n\|^2 + \|p_s^n\|^2) + \\ &|b^n(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega) - b^0(s, x_s^n, q_s^n, p_s^n, \omega)|^2 e^{ks} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I_t^n \triangleq E \left[(|x_t^{n, \tau}|^2) + \frac{1}{2} \int_{t \wedge \tau}^\tau (\|q_s^n\|^2 + \|p_s^n\|^2) ds \right] \leq$$

$$E |X^n - X^0|^2 + 4 \int_t^\infty (c_1(s) + c_2(s)^2 + e^{-ks}) \rho_1(I_s^n) ds + J_n$$

由文[1] 引理 1, 可得 $\rho_1(I_t^n) \leq \rho_1(4k_0) < \infty$.

所以 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_t^n \leq 4 \int_t^\infty (c_1(s) + c_2(s)^2 + e^{-ks}) \rho_1(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_s^n) ds$

其中, $\rho_1(u) = \rho(u) + u$. 则由文[3] 知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_t^n = 0, \quad \forall t \geq 0$$

再对正向 SDE 用 Itô 公式, 与上述讨论类似地, 可得

$$\begin{aligned} E \sup_{t \geq 0} |x_{t \wedge \tau}^n|^2 &\leq E |x_0^n|^2 + 4 \int_0^\infty (c_1(s) + c_2(s)^2 + e^{-ks}) \rho_1(E |x_{s \wedge \tau}^n|^2) ds + \\ &\quad \frac{3}{2} E \int_0^\tau (\|q_s^n\|^2 + \|p_s^n\|^2) ds + J_n + 2E \sup_{t \geq 0} \int_0^{t \wedge \tau} x_s^n q_s^n dw_s + \\ &\quad 2E \sup_{t \geq 0} \int_0^{t \wedge \tau} \int_Z x_s^n p_s^n(z) N_k(ds dz) \end{aligned}$$

故与定理 1 的讨论类似, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} E \sup_{t \geq 0} |x_{t \wedge \tau}^n - x_{t \wedge \tau}^0|^2 = 0$. 结合 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_t^n = 0, \quad \forall t \geq 0$ 得 (5) 式成立.

定理 3 设 τ 为 $\mathcal{H}_t$ 停时, (H1), (H2) 成立, 且对 $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

① $\forall (x_i, q_i, p_i) \in D \triangleq \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \otimes r} \times L_{\Pi(\cdot)}^2(\mathbf{R}^d), i = 1, 2, P - a.s.$

$$\begin{aligned} &\langle x_1 - x_2, b^n(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b^n(t, x_2, q_2, p_2, \omega) \rangle \leq \\ &c_1(t) \rho(|x_1 - x_2|^2) + c_2(t) |x_1 - x_2| (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|); \end{aligned}$$

② 与定理 2 中的 ③ 相同;

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n(t, x, q, p, \omega) = b^0(t, x, q, p, \omega), \quad P - a.s.$

④ 存在 $k > 0$, 使得 $|b^n(t, x, q, p, \omega)| \leq e^{-ks}$.

则定理 2 的结论仍然成立.

定理 3 之证明与定理 2 是类似的, 兹从略.

最后, 在此举例说明, 即使在 $\tau \equiv T > 0, T$ 为常数的情形, $0 \leq c_1(t)$ 为可积, $0 \leq c_2(t)$ 为平方可积之条件, 也是不可以减弱的.

例 (条件 $\int_0^T (c_2(t))^2 dt < +\infty$ 不可以减弱). 设 $\Pi(U) < +\infty, 0 < T$ 为常数. 记 $\tilde{q}_s = s^{-1/3} I_{s \neq 0}, \tilde{p}_s(z) = I_U(z) I_{s \neq 0} s^{-1/3}, c_2(s) = s^{-3/4} I_{s \neq 0}, X = \int_0^T \tilde{q}_s dw_s + \int_0^T \int_Z \tilde{p}_s(z) N_k(ds, dz)$.

易知, 对于 BSDE:

$$x_t = X + \int_t^T c_2(s) |q_s| ds - \int_t^T q_s dw_s - \int_t^T \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz), \quad \forall t \in [0, T] \quad (6)$$

若它存在解, 则必须是:

$$x_t = \int_t^T s^{-(3/4+1/3)} I_{s \neq 0} ds + \int_0^t \tilde{q}_s dw_s + \int_0^t \int_Z \tilde{p}_s(z) N_k(ds, dz), \quad q_t = \tilde{q}_t, p_t = \tilde{p}_t.$$

但此时, 却有 $E x_0 = \int_0^T s^{-13/12} I_{s \neq 0} ds = +\infty$. 这是不合理的, 故方程 (6) 无解. 然而, 若令 $c_2(s) = I_{s \neq 0} s^{-\alpha}, \alpha < 1/2$, 则方程 (6) 存在唯一解.

类似地, 容易举例说明条件 $\int_0^T c_1(s) ds < +\infty$ 不能减弱, 以及在定理 1 之条件下解存在的例子. 为节省篇幅, 兹从略.

参考文献:

- [1] 司徒荣, 曾爱婷. 无界停时带跳倒向随机微分方程解的存在唯一性(I) [J]. 中山大学学报(自然科学版), 1999, 38(3): 1 ~ 6.
- [2] SITU Rong. On solutions of backward stochastic differential equations with jumps and applications [J]. Stoch Proc. & Appl's, 1997, 66: 209 ~ 236.
- [3] SITU Rong. An application of local time to stochastic differential equation in m-dimensional space [J]. 中山大学学报(自然科学版), 1984(3): 1 ~ 12.

On Solutions of BSDE with Jumps and with Unbounded Stopping Terminal

SITU Rong^{*}, ZENG Ai-ting

Abstract: For backward stochastic differential equation with jumps and with non-Lipschitz coefficient the existence and uniqueness of an adapted solution is obtained under the condition of unbounded stopping time. And convergence theorems of solutions to BSDE are derived. An example is also given to show that conditions $\int_0^T c_1(s)ds < +\infty$ and $\int_0^T (c_2(s))^2 ds < +\infty$ cannot be weakened even if the stopping time $\tau \equiv T > 0$ is a constant.

Keywords: backward stochastic differential equation; Ito's formula; non-Lipschitz condition; convergence theorem; stopping time

· 简 讯 ·

本刊获教育部期刊评比一等奖

据国家教育部发布的通知, 教育部开展的 1999 年度全国优秀高校自然科学学报及教育部优秀科技期刊评比活动, 经组织有关专家进行评审, 共评出获奖期刊 200 种, 其中一等奖 50 种, 二等奖 80 种, 三等奖 70 种.

中山大学学报(自然科学版)荣获一等奖. 对获奖期刊, 教育部将颁发奖状和获奖证书. 通知还指出: 该项奖励可等同于教育部科技进步奖.

(本刊通讯员)