

文章编号: 0529-6579 (1999) 05-0004-05

具定量输入毒素的广义 Logistic 模型的性态^{*}

王寿松, 颜 刚

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 讨论了受定量输入毒素污染的种群生长广义 Logistic 模型的动力学性态. 通过研究模型解的渐近性质, 从而得到生物种群受不同程度的环境毒素影响而产生不同结局 (灭绝或持续生存) 的条件.

关键词: 广义 Logistic 模型; 稳定性; 持久生存; 灭绝

中图分类号: O 175.14 **文献标识码:** A

假设某生物种群生存于一给定空间, 密度均匀分布, 没有成员从此空间迁入与迁出; 在时间 t 此种群在此空间内的全体成员数为 $x(t)$, 环境中毒素浓度为 $c_E(t)$, 生物体内的毒素浓度为 $c_0(t)$. 假若在无毒素影响时, 此种群按广义 Logistic 模型^[1]进行生长. 考虑当环境具有定量输入毒素时, 按广义 Logistic 形式生长的单种群模型可描述如下

$$(M) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{(r_0 - r_1 c_0)x(r_0 - r_1 c_0 - fx)}{r_0 - r_1 c_0 - vfx}, & (v \geq -1) & (1) \\ \frac{dc_0}{dt} = kc_E - gc_0 - mc_0 & (2) \\ \frac{dc_E}{dt} = -hc_E + w & (3) \end{cases}$$

$$x(0) > 0, c_0(0) = c_E(0) = 0$$

其中, w 为外界输入环境的毒素量; $w, r_0, r_1, f, h, k, g, m$ 都是正常数; hc_E 为毒素由环境内损失到环境外的部分; kc_E 为生物个体对环境毒素浓度的吸收率; gc_0 为生物个体体内毒素的排泄率; mc_0 为生物个体新陈代谢因素的作用; r_0 为无毒素时种群的内禀增长率; r_1 反映种群增长率受毒素影响程度; f 为密度制约因子; $v \geq -1$ 为广义 Logistic 模型^[1]适应性参数; $r(t) = r_0 - r_1 c_0$ 表示种群的生长率, 它随种群体内的毒素浓度升高而减小.

为讨论模型 (M) 的动力学性态, 先证明几个引理.

很明显, 模型 (M) 有平衡点 $E^*(c_E^*, c_0^*, x^*) = \left(\frac{w}{h}, \frac{wk}{(g+m)h}, \frac{r_0 h(g+m) - r_1 wk}{fh(g+m)} \right)$

* 基金项目: 广东省自然科学基金 (960037) 资助项目

收稿日期: 1998-11-23 作者简介: 王寿松, 男, 1937 年生, 教授.

引理 1 假设 $g+m \neq h$, 则对于模型 (M) 的解, $c_E(t)$ 和 $c_0(t)$ 都是单调上升的, 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_E(t) = \frac{w}{h}; \lim_{t \rightarrow \infty} c_0(t) = \frac{wk}{(g+m)h}.$$

证明 对于方程 (2), (3) 可直接求解得

$$c_E(t) = \frac{w}{h}(1 - e^{-ht}) \quad (4)$$

$$c_0(t) = wk \left[\frac{e^{-(g+m)t}}{(g+m-h)(g+m)} - \frac{e^{-ht}}{(g+m-h)h} + \frac{1}{(g+m)h} \right]$$

令 $\delta = g+m-h, p = \frac{e^{-\delta t}}{(g+m)\delta} - \frac{1}{\delta h}$

则 $c_0(t) = wkpe^{-ht} + \frac{wk}{(g+m)h} \quad (5)$

若 $g+m > h$ 即 $\delta > 0$, 则 $p < \frac{1}{(g+m)\delta} - \frac{1}{\delta h} < 0$;

若 $g+m < h$, 即 $\delta < 0$, 则 $\frac{e^{-\delta t}}{(g+m)\delta} < \frac{1}{(g+m)\delta} < \frac{1}{\delta h}$, 故对一切 $\delta \neq 0, p < 0$.

从 (4), (5) 式即得结论成立.

引理 1 说明以常量向环境输入毒素, 种群体内的毒素累积而使体内毒素浓度逐渐升高.

引理 2 若 $t \in [0, t_0]$ 时 $vr(t) < 0$ 恒成立, 则当 $t \in [0, t_0]$ 时方程 (1) 的解 $x(t)$ 不与 $-r(t)/(vf)$ 相交.

证明 将方程 (1) 变形如下

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r(t)}{v^2 f} [r(t) + vfx] - \left(\frac{v+1}{v^2 f} \right) \frac{r^3(t)}{r(t) + vfx} + \frac{v+2}{v^2 f} r^2(t) \quad (6)$$

从 (6) 式可以看出, 当 $t \in [0, t_0]$ 时, 若 $vr(t) < 0$ 恒成立, 则有如下断言

如果 $x(t)$ 从 $-r(t)/(vf)$ 上方相交于 t_1 时刻, 则 $x'(t_1) = +\infty$;

如果 $x(t)$ 从 $-r(t)/(vf)$ 下方相交于 t_2 时刻, 则 $x'(t_2) = -\infty$.

这是不可能的, 事实上,

若 $x(0) > -r_0/(vf)$, 设 $\bar{t}_0$ 是 $x(t)$ 与 $-r(t)/(vf)$ 相交的第 1 个时刻.

记 $a(t) = -r(t)/(vf)$, 注意 $r(t) = r_0 - r_1 c_0(t)$, 由引理 1 中 $c_0(t)$ 的性质知 $a'(\bar{t}_0)$ 有限, 而 $x'(\bar{t}_0) = +\infty$, 由 Taylor 展开,

$$x(t) = x(\bar{t}_0) + x'(\bar{t}_0)(t - \bar{t}_0) + o(t - \bar{t}_0)$$

$$a(t) = a(\bar{t}_0) + a'(\bar{t}_0)(t - \bar{t}_0) + o(t - \bar{t}_0)$$

所以, $t < \bar{t}_0$ 时, $x(t) < a(t)$, 由于它们都是连续的, 故必有另一个时刻 $\bar{t}_1 < \bar{t}_0$, 使 $x(\bar{t}_1) = a(\bar{t}_1)$, 这与 $\bar{t}_0$ 为第 1 个相交时刻矛盾. 同样可以证明 $x(0) < -r_0/(vf)$ 时成立.

引理 3 在模型 (M) 中, 若 $x(t)$ 有界, 则当 $w > \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$; 当 $w < \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{r_0 h(g+m) - r_1 wk}{fh(g+m)}$.

证明 首先证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 存在.

若不然, 取 $x(t_n^{(1)}) = \sup_{t \geq t_n^{(1)}} x(t)$, $t_1^{(1)} < t_2^{(1)} < \dots < t_n^{(1)} < \dots$; $x(t_n^{(2)}) = \inf_{t \geq t_n^{(2)}} x(t)$, $t_1^{(2)} < t_2^{(2)} < \dots < t_n^{(2)} < \dots$; 则 $x(t_n^{(1)})$ 是单调下降序列, $x(t_n^{(2)})$ 是单调上升序列, 由 $x(t)$ 的有界

性知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n^{(1)})$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n^{(2)})$ 均存在, 且 $x'(t_n^{(1)}) = x'(t_n^{(2)}) = 0$. 设 $x^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n^{(1)})$, $x^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n^{(2)})$, 故 $x^{(1)} \neq x^{(2)}$.

另一方面, 将 $x(t_n^{(1)})$ 和 $x(t_n^{(2)})$ 代入方程(1)中, $0 = r_0 - r_1 c_0(t_n^{(1)}) - f x(t_n^{(1)}) = r_0 - r_1 c_0(t_n^{(2)}) - f x(t_n^{(2)}) = 0$, 注意到 $\lim_{t \rightarrow \infty} c_0(t)$ 存在, 令 $n \rightarrow \infty$, 有 $x^{(1)} = x^{(2)}$. 这一矛盾说明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 存在. 由 $x(t)$ 的有界性可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$.

1) $w > \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$ 时, 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)x[r(t) - fx] = 0$, 由条件得 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r_0 - r_1 c_0(t)) < 0$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

2) $w < \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$ 时, 可以证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$.

事实上, 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, 将方程(1)变为

$$fx + \frac{x'(t)}{x(t)} = r(t) - \frac{vf}{r(t)} x'(t)$$

$$\text{两边积分} \quad f \int_0^t x(t) dt + \int_0^t \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int_0^t r(t) dt - \int_0^t \frac{vf}{r(t)} x'(t) dt$$

令 $g(t) = \int_0^t r(t) dt - \int_0^t \frac{vf}{r(t)} x'(t) dt$, 则 $g'(t) = r(t) - \frac{vf}{r(t)} x'(t)$, 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \triangleq r^*$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = +\infty$.

即 $f \int_0^t x(t) dt + \ln \frac{x(t)}{x(0)} = g(t)$, $\frac{x(t)}{x(0)} \exp \left[f \int_0^t x(t) dt \right] = \exp[g(t)]$, 故 $\int_0^\infty x(t) dt = +\infty$,

由洛必达法则得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\exp \left[-f \int_0^t x(s) ds \right]} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{\exp \left[-f \int_0^t x(s) ds \right] (-fx(t))} = \\ &\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{-f \exp \left[-f \int_0^t x(s) ds \right]} \cdot \frac{r(t)[r(t) - fx]}{r(t) + vfx} = -\infty \end{aligned}$$

这一矛盾说明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$, 从而可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(t)}{f} = \frac{r_0 h(g+m) - r_1 wk}{fh(g+m)}$.

利用以上引理, 即可讨论模型(M)的有关动力学性态. 由于 $c_0(t)$ 单调上升, 故 $r(t) = r_0 - r_1 c_0$ 单调下降. 所以, $r(t)$ 有 3 种情况: $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) < 0$. 以此有如下 3 个定理.

定理 1 若 $w < \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$, 则对模型(M), 当 $v \geq 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{r_0 h(g+m) - r_1 wk}{fh(g+m)}$; 当 $v < 0$ 时, 若 $x(0) > -\frac{r_0}{vf}$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$, 若 $x(0) < -\frac{r_0}{vf}$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{r_0 h(g+m) - r_1 wk}{fh(g+m)}.$$

证明 当 $w < \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$, 有 $r(t) > 0 (\forall t)$, 故当 $x(t)$ 充分大时有 $\frac{dx(t)}{dt} < 0$, 即 $x(t)$ 为有界的.

由引理3得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{r_0 h(g+m) - r_1 w k}{f h(g+m)}$.

当 $v < 0$, 且 $x(0) > -\frac{r_0}{vf}$ 时有 $vr(t) < 0$, 由引理2, 方程(5)中前2项恒正.

故 $\frac{dx(t)}{dt} > \frac{v+2}{v^2 f} r^2(t) > \frac{v+2}{v^2 f} r^{*2}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$.

$v < 0$, 且 $x(0) < -r_0/(vf)$ 时, 由引理2, 由 $x(0)$ 出发的解始终在 $-r(t)/(vf)$ 的下方,

故 $x(t)$ 是有界的, 那么由引理3, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{r_0 h(g+m) - r_1 w k}{f h(g+m)}$.

定理1说明若 $r^* > 0$, 如果 $v > 0$, 那么 E^* 是全局稳定的, 如果 $v < 0$, 且 $x(0) < -r_0/(vf)$, 则 E^* 是局部稳定的. 从定理1亦可以看出, 当 $w = 0$ 时, 即没有毒素进入环境, 此结果与文[1]中的结果一致. 从种群持久生存的观点看, 在定理条件下, 种群或持续生存或灭绝.

定理2 若 $w = \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$, 则对模型(M)以下结论成立.

1) $v < 0$ 时, 若 $x(0) > -\frac{r_0}{vf}$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(0) \exp \left[\frac{r_1 p w k}{v h} + \int_0^\infty \frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t)+v f x} dt \right]$;

若 $x(0) < -\frac{r_0}{vf}$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

2) $v = 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

3) $v > 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(0) \exp \left[\frac{r_1 p w k}{v h} + \int_0^\infty \frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t)+v f x} dt \right]$

证明 1) 若 $x(0) > -\frac{r_0}{vf}$, 令 $F(x, t) = r(t) \frac{r(t)-fx}{r(t)+vfx} = r(t) \left[-\frac{1}{v} + \frac{v+1}{v} \frac{r(t)}{r(t)+vfx} \right]$, 即 $\frac{dx}{dt} = xF(x, t)$, 所以 $x(t) = x(0) \exp \left[\int_0^t F(x, t) dt \right]$.

可以证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(0) \exp \left[\int_0^\infty -\frac{r(t)}{v} dt + \int_0^\infty \frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t)+vfx} dt \right]$.

首先 $\int_0^\infty -\frac{r(t)}{v} dt = -\frac{1}{v} \int_0^\infty (r_0 - r_1 w) dt = -\frac{1}{v} \int_0^\infty (-r w k p e^{-ht}) dt = \frac{r_1 w k p}{v h}$ (7)

其次考察 $\int_0^\infty \frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t)+vfx} dt$ 的敛散性, 由引理2, $\frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t)+vfx} > 0$, 故 $\frac{dx}{dt} > 0$, 又 $x(0)$

$> -\frac{r_0}{vf}$, 知 $\left| \frac{1}{r(t)+vfx} \right| < \left| \frac{1}{r_0+vfx_0} \right|$, 由于 $\int_0^\infty \frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t)+vfx} dt$ 与 $\int_0^\infty r^2(t) dt$ 的敛散性相

同, 又由(7)式知 $\int_0^\infty r^2(t) dt$ 是收敛的, 故 $\int_0^\infty \frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t)+vfx} dt$ 是收敛的. 从而,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(0) \exp \left[\frac{r_1 w k p}{v h} + \int_0^\infty \frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t)+vfx} dt \right]$$

若 $x(0) < -\frac{r_0}{vf}$, 由引理2, $x(t) < -\frac{r(t)}{vf} (\forall t)$, 因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{r(t)}{vf} = 0$.

2) $v = 0$ 时, (1) 式为 $dx/dt = x[r(t)-fx]$, 从引理3的证明可以看出, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

3) $v > 0$ 时, $dx/dt = r(t)x \left[-\frac{1}{v} + \frac{v+1}{v} \frac{r(t)}{r(t)+vfx} \right] > -\frac{1}{v} r(t)x$

所以 $x(t) > x(0) \exp \left[-\frac{1}{v} \int_0^t r(t) dt \right] > 0$, 故 $\left| \frac{1}{r(t) + vfx} \right|$ 为有界量. 从 1) 的证明可以看出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(0) \exp \left[\frac{r_1 w k p}{v h} + \int_0^{\infty} \frac{v+1}{v} \frac{r^2(t)}{r(t) + v f x} dt \right].$$

定理 3 若 $w > \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$, 则对模型 (M), 当 $v \leq 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$; 当 $v > 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$.

证明 $v \leq 0$ 时, 由 $w > \frac{r_0 h(g+m)}{r_1 k}$, 就有 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) < 0$.

故 $\exists t_0$, s. t. $t \in [0, t_0)$ 时, $r(t) > 0$; $t \in (t_0, +\infty)$ 时, $r(t) < 0$, $r(t_0) = 0$, 故当 $t > t_0$ 时, 若 $x(t)$ 充分大, 则 $dx/dt < 0$, 即 $x(t)$ 有界, 由引理 3, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

$v > 0$ 时, 当 $t \in [0, t_0)$, $\frac{dx}{dt} > -\frac{1}{v} r(t)$, 故 $x(t_0) > 0 = -\frac{r(t)}{vf}$; 当 $t \in (t_0, +\infty)$ 时, $vr(t) < 0$, 由 (6) 式及引理 2 得 $\frac{dx}{dt} > \frac{v+2}{v^2 f} r^2(t)$, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$.

参考文献:

- [1] 王寿松. 单种群生长的广义 Logistic 模型 [J]. 生物数学学报, 1990, 5 (1): 22 ~ 25.
- [2] 杨晓明. 毒素对两食饵种群捕食种群系统影响的数学模型 [J]. 生物数学, 1992 (1): 75 ~ 80.
- [3] 王稳地, 马知恩. 参数波动与解的位置关系 [J]. 应用数学学报, 1990, 13 (1): 122 ~ 124.
- [4] HALLAM T G, 马知恩. Persistence in population models with demographic fluctuations [J]. J Math Biol, 1986, 24, 327 ~ 339.
- [5] FREEDMAN H I, SHUKLA J B. Models for the effect of toxicant in single-species and predator-prey systems [J]. J Math Biol, 1991, 30: 15 ~ 30.
- [6] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究 [M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996. 168 ~ 189.

Dynamics of the Effect of Constant Toxicant on the Populations Stimulated by Generalized Logistic Model

*
WANG Shou-song, YAN Gang

Abstract: Dynamics of the generalized Logistic model polluted by constant toxicant of time is studied in detail. By analyzing the asymptotic properties of the solution, we obtain the polluted conditions that will lead to different results (persistence or extinction) to the populations.

Keywords: generalized Logistic model; stability; persistence; extinction