

文章编号: 0529-6579 (2000) 01-0105-03

Zakharov 方程的一类精确周期解^{*}

罗志宏¹, 张磊²

(1. 中山大学计算中心, 广州 510275; 2. 中山大学数学系)

摘 要: 得到 Zakharov 方程的一类精确周期解. 周期解是从其 Hirota 双线性形式解出的, 并用 θ 函数表示.

关键词: Zakharov 方程; Hirota 双线性形式; θ 函数

中图分类号: O 175.24 **文献标识码:** A

1 主要结果

30 年来, 包络方程得到了广泛的关注, 大量应用于激光、流体、等离子体物理等方面的研究. 人们发展了多种系统地求解其显式孤立子解的方法, 如反散射方法、Hirota 双线性法、代数几何法等, 但包络方程的周期解情形较不为人注意. 近几年来, 香港大学 Chow^[1] 发展了一种求解包络方程精确周期解的方法, 并利用它得到了非线性 Schrödinger 方程 (NLS)、高阶 NLS, Davey-Stewartson 方程^[1] 及其涡流系统^[2] 的一类精确周期解, 这类周期解是由椭圆函数和 θ 函数表达的.

本文应用 Chow 的方法得到了 1 个新结果.

定理 1 Zakharov 方程

$$\left. \begin{aligned} iE_t + E_{xx} - \rho E &= 0 \\ \rho_{tt} - \rho_{xx} &= (EE^*)_{xx} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

有如下精确周期解

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\lambda [\theta_1(\omega t, \tau_1) \theta_3(\alpha x, \tau) + i \theta_2(\omega t, \tau_1) \theta_4(\alpha x, \tau)]}{\theta_3(\omega t, \tau_1) \theta_4(\alpha x, \tau) + \theta_3(\alpha x, \tau) + \theta_4(\omega t, \tau_1)} e^{i\Omega t} \\ \rho &= -2 [\log (\theta_3(\omega t, \tau_1) \theta_4(\alpha x, \tau) + \theta_4(\omega t, \tau_1) \theta_3(\alpha x, \tau))]_{xx} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $\lambda^2 = \frac{2(\omega^2 - \alpha^2) \theta_2^2(0, \tau_1) \theta_3^2(0, \tau) \theta_4^2(0, \tau)}{\theta_4^2(0, \tau_1)}$, $\omega = -\frac{2\alpha^2 \theta_3^2(0, \tau) \theta_4^2(0, \tau)}{\theta_4^2(0, \tau_1)}$,

$$\Omega = 2\alpha^2 \frac{\theta_2''(0, \tau)}{\theta_2(0, \tau)} \frac{\theta_3^2(0, \tau_1)}{\theta_4^2(0, \tau_1)} = \frac{\theta_3^4(0, \tau) + \theta_4^4(0, \tau)}{2\theta_3^2(0, \tau) \theta_4^2(0, \tau)}$$

本文利用方程 (1) 的 Hirota 双线性形式得到它的一类精确周期解, 这种方法也可运用到其它具有双线性形式的非线性发展方程中去, 以求它们的周期解. θ 函数在公式中显示出很强的对称性, 因此可以较容易地求得方程的新解.

^{*} 收稿日期: 1999-01-22 作者简介: 罗志宏 (1970~), 女, 助教.

2 θ 函数及其恒等式

求解过程中用到 Hirota 双线性变换及 θ 函数的一些恒等式. θ 函数在文 [3] 中有详细研究, 在此仅列出本文中涉及的有关内容. θ 函数 $\theta_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$ 及其参数 q, τ, q', τ' 的定义:

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= \theta_1(x, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin(2n+1)x = \\ &\quad - \sum_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i \tau(m+1/2)^2 + 2i(m+1/2)(x+\pi/2)] \\ \theta_2(x) &= \theta_2(x, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)x = \\ &\quad \sum_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i \tau(m+1/2)^2 + 2i(m+1/2)x]\end{aligned}\quad (3)$$

$$\theta_3(x) = \theta_3(x, \tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nx = \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(\pi i \tau m^2 + 2imx)$$

$$\theta_4(x) = \theta_4(x, \tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx = \sum_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i \tau m^2 + 2im(x+\pi/2)]$$

其中, $0 < q < 1$, $q = \exp(\pi i \tau)$, 或 $q = \exp(-\pi K/K')$, $q' = \exp(-\pi K/K')$, $\tau' = -1/\tau \cdot K'$, K 是第一类椭圆积分.

关于 θ 函数有大量的恒等式, 本文用到有

$$\theta_2^2(0) \theta_1^2(x) = \theta_3^2(0) \theta_4^2(x) - \theta_4^2(0) \theta_3^2(x), \theta_2^2(0) \theta_2^2(x) = \theta_3^2(0) \theta_3^2(x) - \theta_4^2(0) \theta_4^2(x) \quad (4)$$

$$\theta_4'(0)/\theta_4(0) - \theta_2'(0)/\theta_2(0) = \theta_3^4(0), \theta_3'(0)/\theta_3(0) - \theta_2'(0)/\theta_2(0) = \theta_4^4(0) \quad (5)$$

3 双线性形式及周期解

引进 Hirota 双线性算子^[4]

$$D_x^m D_t^n f \circ g = \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right]^m \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right]^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}$$

则方程(1)的 Hirota 双线性形式是

$$(iD_t + D_x^2)g \circ f = 0, (D_x^2 - D_t^2 - c)f \circ f = gg^* \quad (6)$$

$E = g/f$, $\rho = -2(\log f)_{xx}$, f 为实函数, c 为常数. 寻求如下形式的解

$$\begin{aligned}g &= [\lambda \theta_1(\omega t, \tau_1) \theta_3(\alpha x, \tau) + i \mu \theta_2(\omega t, \tau_1) \theta_4(\alpha x, \tau)] \exp(i \Omega t) \\ f &= \theta_3(\omega t, \tau_1) \theta_4(\alpha x, \tau) + \theta_3(\alpha x, \tau) \theta_4(\omega t, \tau_1)\end{aligned}\quad (7)$$

其中, $\lambda, \mu, \alpha, \omega, \Omega$ 均是实数, f 的这种取法是最唯一的, 由于本文只讨论非奇异解, θ_1, θ_2 有实零根, 因而不能出现在分母中, 而 θ_3, θ_4 实际上只相差 $\pi/2$ 相位.

将(6)式代入(5)式的第2式得

$$\begin{aligned}&\theta_3^2(\omega t, \tau_1) D_x^2 \theta_4(\alpha x, \tau) \circ \theta_4(\alpha x, \tau) + 2 \theta_3(\omega t, \tau_1) \theta_4(\omega t, \tau_1) D_x^2 \theta_3(\alpha x, \tau) \circ \theta_4(\alpha x, \tau) + \\ &\theta_4^2(\omega t, \tau_1) D_x^2 \theta_3(\alpha x, \tau) \circ \theta_3(\alpha x, \tau) - \theta_4^2(\alpha x, \tau) D_t^2 \theta_3(\omega t, \tau_1) \circ \theta_3(\omega t, \tau_1) - \\ &2 \theta_3(\alpha x, \tau) \theta_4(\alpha x, \tau) D_t^2 \theta_3(\omega t, \tau_1) \circ \theta_4(\omega t, \tau_1) - \theta_3^2(\alpha x, \tau) D_t^2 \theta_4(\omega t, \tau_1) \circ \theta_4(\omega t, \tau_1) - \\ &c \theta_3^2(\omega t, \tau_1) \theta_4^2(\alpha x, \tau) - c \theta_4^2(\omega t, \tau_1) \theta_3^2(\alpha x, \tau) - 2c \theta_3(\omega t, \tau_1) \theta_4(\omega t, \tau_1) \theta_3(\alpha x, \tau) \theta_4(\alpha x, \tau) = \\ &\lambda^2 \theta_1^2(\omega t, \tau_1) \theta_3^2(\alpha x, \tau) + \mu^2 \theta_2^2(\omega t, \tau_1) \theta_4^2(\alpha x, \tau)\end{aligned}$$

利用 $D_x^2 \theta_3(x) \circ \theta_3(x) = b_2 \theta_3^2(x) + b_1 \theta_4^2(x)$, $D_x^2 \theta_3(x) \circ \theta_4(x) = b_3 \theta_3(x) \theta_4(x)$, $D_x^2 \theta_4(x) \circ \theta_4(x) = b_1 \theta_3^2(x) + b \theta_4^2(x)$

及式(4) 并合并 $\theta_3^2(\omega t, \tau_1)$, $\theta_4^2(\omega t, \tau_1)$, $\theta_3(\omega t, \tau_1) \theta_4(\omega t, \tau_1)$ 的系数, 得

$$\begin{aligned} & \theta_3^2(\omega t, \tau_1) \left\{ (\alpha^2 - \omega^2) [b_1 \theta_3^2(\alpha x, \tau) + b_2 \theta_4^2(\alpha x, \tau)] - c \theta_4^2(\alpha x, \tau) - \right. \\ & \left. [1/\theta_2^2(0, \tau_1)] [-\lambda^2 \theta_4^2(0, \tau_1) \theta_3^2(\alpha x, \tau) + \mu^2 \theta_3^2(0, \tau_1) \theta_4^2(\alpha x, \tau)] \right\} + \\ & \theta_4^2(\omega t, \tau_1) \left\{ (\alpha^2 - \omega^2) [b_2 \theta_3^2(\alpha x, \tau) + b_1 \theta_4^2(\alpha x, \tau)] - c \theta_3^2(\alpha x, \tau) - \right. \\ & \left. [1/\theta_2^2(0, \tau_1)] [\lambda^2 \theta_3^2(0, \tau_1) \theta_3^2(\alpha x, \tau) - \mu^2 \theta_4^2(0, \tau_1) \theta_4^2(\alpha x, \tau)] \right\} + \\ & 2 \theta_3(\omega t, \tau_1) \theta_4(\omega t, \tau_1) \theta_3(\alpha x, \tau) \theta_4(\alpha x, \tau) [(\alpha^2 - \omega^2) b_3 - c] \equiv 0 \end{aligned}$$

其中, $b_1 = 2 \theta_3^2(0, \tau) \theta_4^2(0, \tau)$, $b_2 = 2 \frac{\theta_2''(0, \tau)}{\theta_2^2(0, \tau)}$, $b_3 = \frac{\theta_3''(0, \tau)}{\theta_3^2(0, \tau)} + \frac{\theta_4''(0, \tau)}{\theta_4^2(0, \tau)}$.

再先后利用 $\theta_3^2(\omega t, \tau_1)$, $\theta_4^2(\omega t, \tau_1)$, $\theta_3(\omega t, \tau_1) \theta_4(\omega t, \tau_1)$ 的线性无关性及 $\theta_3^2(\alpha x, \tau)$, $\theta_4^2(\alpha x, \tau)$, $\theta_3(\alpha x, \tau) \theta_4(\alpha x, \tau)$ 的线性无关性, 便得到

$$\lambda^2 = \mu^2, (\alpha^2 - \omega^2) b_1 = -\frac{\lambda^2 \theta_4^2(0, \tau_1)}{\theta_2^2(0, \tau_1)}, (\alpha^2 - \omega^2) (b_2 - b_3) = \frac{\lambda^2 \theta_3^2(0, \tau_1)}{\theta_2^2(0, \tau_1)} \quad (8)$$

由(5) 式可得到确定 τ, τ_1 关系的方程如下

$$\frac{\theta_3^2(0, \tau_1)}{\theta_4^2(0, \tau)} = \frac{\theta_3^4(0, \tau) + \theta_4^4(0, \tau)}{2 \theta_3^2(0, \tau) \theta_4^2(0, \tau)} \quad (9)$$

类似地, 对(6) 式的第 1 个式子进行 2 步 t, x 分离步骤, 得到振动频率为

$$\Omega = \alpha^2 b_2, \omega = -\alpha^2 b_1 / [\theta_4^2(0, \tau_1)] \quad (10)$$

结合(7) ~ (10) 式, 即得方程(1) 的周期解(2).

参考文献:

- [1] CHOW K W. A class of exact periodic solutions of nonlinear envelope equations[J]. J Math Phys, 1995, 36(8): 4125 ~ 4137.
- [2] CHOW K W, KO N W M, TANG S K. Solitons in (2+0) dimensions and their applications in vortex dynamics [J]. Fluid Dyn Res, 1997, 21(1): 101 ~ 114.
- [3] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 1979. 553 ~ 638.
- [4] HIROTA A. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation[J]. J Math Phys, 1973, 14(7): 805 ~ 809.

A Class of Exact Periodic Solutions of Zakharov Equation

LUO Zhi-hong^{*}, ZHANG Lei

Abstract: A class of exact periodic solutions of Zakharov equation is derived by the Hirota bilinear method. These solutions are expressed in terms of θ functions.

Keywords: Zakharov equation; Hirota bilinear form; θ function

^{*} Center of Computation, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China