

文章编号: 0529-6579 (2000) 01-0108-03

关于 Weinstein 猜想的一个注记^{*}

胡建勋

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 当辛流形的某些 Gromov-Witten 不变量非零时, 可以证明 Weinstein 猜想. 利用 Gromov-Witten 不变量的 Blowup 公式证明了某些辛流形的 Blowup 具有非零不变量, 从而证明了 Weinstein 猜想成立.

关键词: Gromov-Witten 不变量; Blowup; Weinstein 猜想

中图分类号: O175; O186 **文献标识码:** A

设 (M, ω) 为紧致连通辛流形. 即 ω 为非退化的闭 2-形式. M 中的超曲面 S 称为 contact 型的, 如果在 S 的邻域 u 上存在向量场 X 满足 ① X 横截于 S 且 ② $L_X \omega = \omega$. 对于辛流形 M 中的任意超曲面 S , 存在 S 的一维特征分布 $\xi \rightarrow S$, 对 $x \in S$, 其纤维为

$$\xi_x = \{v_x \mid v_x \in T_x S, \omega(v_x, u_x) = 0, \forall u_x \in T_x S\}$$

Weinstein^[1] 提出了如下猜想: 若 S 为紧致 contact 型超曲面, 则 S 上至少存在 ξ 的一个闭轨道.

Weinstein 猜想首先由 Weinstein^[1] 和 Rabinowitz^[2] 对 $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$ 中的凸或星形超曲面证明. Viterbo^[3] 对 $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$ 中的 contact 型超曲面证明了该猜想. Floer 等^[4] 证明了在条件 $\pi_2(M) = 0$ 下 $(M \times \mathbf{R}^{2n}, \omega \oplus \omega_0)$ 中 Weinstein 猜想. Hofer 等^[5] 证明了某些紧致辛流形中的 Weinstein 猜想成立, 并指明可以应用亏格为零的 J -全纯曲线或扰动 J -全纯曲线来证明 Weinstein 猜想, 而且以 d -指标理论的形式将这一思想定量化. 但具有负指数的多重覆盖 J -全纯球面的横截性困难使得他们的方法很难应用到更一般的流形.

人们通过近 10 年的探索终于获得关于 J -全纯曲线更好的理解. 关于 Floer 同调群理论及 Gromov-Witten 不变量的最新进展^[6] 克服了横截性的困难, 从而使得 Gromov-Witten 不变量应用到 Weinstein 猜想的证明成为可能. 为此, 先回忆一下 Gromov-Witten 不变量的定义. 给定 $A \in H_2(M, Q)$, 带 $(n+2)$ 个标记点的 Gromov-Witten 不变量定义为同态

$$\Psi_{A, g, n+2}^M: H^*(M_{A, g, n+2}, Q) \times H^*(M, Q)^{n+2} \rightarrow Q$$

其中, $M_{A, g, n+2}$ 为代表 A 且亏格为 g 的带 $(n+2)$ 标记点的稳定映射的模空间的 Deligne-Mumford 紧致化.

* 基金项目: 国家自然科学基金基金资助项目 (19771091); 广东省自然科学基金资助项目 (984134); 中山大学高等学术基金资助项目

收稿日期: 1999-03-11 作者简介: 胡建勋 (1964~), 男, 副教授.

引理 1^① 假定 M 中超曲面 S 分离 M , 即存在子流形 M_- 和 M_+ 具有共同边界 S 且满足 $M_- \cup M_+ = M$, $M_- \cap M_+ = S$. 如果存在 $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$, $\alpha_+, \alpha_- \in H^*(M, \mathbb{Q})$ 使得

$$(1) \operatorname{supp}(\alpha_+) \subset M_+ \setminus S, \operatorname{supp}(\alpha_-) \subset M_- \setminus S;$$

$$(2) \text{Gromov-Witten 不变量 } \Psi_{A, g, n+2}(C; \alpha_-, \alpha_+, \beta_1, \dots, \beta_n) \neq 0$$

则 S 上至少存在 ξ 的一个闭轨道.

在代数几何中, Blowup 已经成为一类基本的手术. 人们通过对流形作 Blowup 手术来获得新的流形, 因此 Blowup 现在已成为辛几何中一类非常重要的手术倍受人们重视. 用 $p: M \rightarrow M$ 记自然 Blowup 投影. 作者曾仔细研究过 Gromov-Witten 不变量在 Blowup 手术下的变化并证明了一系列 Gromov-Witten 不变量的 Blowup 公式. 设 $E \subset M$ 为例外除子. e 为除子 E 中的一直线类. 作者^② 证明了

引理 2 如果 $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^*(M, \mathbb{Z})$, 则

$$\Psi_{A, 0, n+1}^M([M]; \alpha_1, \dots, \alpha_n, [pt]) = \Psi_{p^*(A)-e, 0, n}^M([M], p^!(\alpha_1), \dots, p^!(\alpha_n)),$$

其中, $p^!$ 记 PDp^*PD .

利用该结果可以证明以下定理.

定理 假定 M 中的超曲面 S 分离 M , 即存在子流形 M_- 和 M_+ 具有共同边界 S 且 $M_- \cup M_+ = M$, $M_- \cap M_+ = S$. 如果存在 $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$, $\alpha_+, \alpha_- \in H^*(M, \mathbb{Q})$ 使得

$$(1) \operatorname{supp}(p^!(\alpha_+)) \subset M_+ \setminus S, \operatorname{supp}(p^!(\alpha_-)) \subset M_- \setminus S;$$

$$(2) \Psi_{A, 0, n+3}^M([M]; \alpha_1, \dots, \alpha_n, [pt]) \neq 0$$

则 S 至少存在一个闭轨道.

证明 由条件 (2) 及引理 2 有 $\Psi_{p^*(A), 0, n+2}^M([M], p^!(\alpha_+), p^!(\alpha_-), p^!(\alpha_1), \dots, p^!(\alpha_n)) \neq 0$. 由于 M 中超曲面 S , $p^!(\alpha_+), p^!(\alpha_-)$ 满足引理 1 的条件. 因此, 由引理 1 可知定理成立.

例 1 对 CP^2 . 设 $L = [CP^1] \in H_2(CP^2, \mathbb{Z})$, 由于在 CP^2 中仅有 1 条二次曲线通过 5 点, 因此有

$$\Psi_{2L, 0, 5}^{CP^2}([M], [pt], [pt], [pt], [pt], [pt]) = 1$$

不难由定理 1 看出 CP^2 中的 Weinstein 猜测成立.

例 2 对 CP^3 . 设 $L = [CP^1] \in H_2(CP^3, \mathbb{Z})$, 不难验证

$$\Psi_{2L, 0, 5}^{CP^3}([M], [pt], [pt], [pt], [line], [line]) = 1$$

由定理 1 可知 CP^3 中的 Weinstein 猜测成立.

参考文献:

- [1] WEINSTEIN A. Periodic orbits for convex hamiltonian systems[J]. Proc Symp Pure Ann Math, 1978, 108: 507~518.
- [2] RABINOWITZ P. Periodic solutions of hamiltonian systems[J]. Comm Pure Appl Math, 1979, 31: 336~352.

① LIU G, TIAN G. Weinstein conjecture and GW invariants, dg-ga/9712020

② Gromov-Witten invariants of Blowups along points and curves, math. AG/9810081, to appear in Math Z

- [3] VITERBO C. A proof of the Weinstein conjecture in $\mathbf{R}^{2n}$ [J] . Ann Inst Henri Poincare, Analyse nonlinear, 1987, 4: 337 ~ 356.
- [4] FLOER A, HOFER A, VITERBO C. The Weinstein conjecture in $P \times C^d$ [J] . Math Z, 1989, 203: 355 ~ 378.
- [5] HOFER H, VITERBO C. The Weinstein conjecture in the presence of J -holomorphic spheres[J] . Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 583 ~ 622.
- [6] LI J, TIAN G. Virtual moduli cycles and GW-invariants of general symplectic manifolds, Topics in symplectic 4-manifold[M] . Cambridge MA: International Press, 1998. 47 ~ 83.

A Remark on Weinstein Conjecture

HU Jian-xun^{*}

Abstract: The Weinstein conjecture holds provided that some Gromov-Witten invariants are nonzero. Using the blowup formula of Gromov-Witten invariant, the author proves the blowups of some symplectic manifolds have nonzero Gromov-Witten invariants. Therefore, the Weinstein conjecture is true.

Keywords: Gromov-Witten invariant; blowup; Weinstein conjecture

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China