

文章编号: 0529-6579 (2000) 04-0010-05

分数次积分算子的交换子的 H^1 有界性^{*}

许 明

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 用小波分析的方法, 证明了分数次积分算子的交换子的 H^1 有界性, 即 $\|fI^\alpha(g) - gI^\alpha(f)\|_{H^1} \leq C \|f\|_p \|g\|_q$, 其中, $1 < p, q < \infty, 1/p + 1/q = 1 + \alpha, 0 < \alpha < 1$.

关键词: 分数次积分算子; 小波; Hardy 空间

中图分类号: O174.1 文献标识码: A

Coifman 等^[1] 证明了在 T 是卷积型奇异积分算子时, 若 $b \in \text{BMO}(\mathbf{R})$, 则交换子 $C(f) = [b, T]f = bTf - T(bf)$ 是 L^p 有界的, $1 < p < \infty$. 反之, 若 $C_j = [b, R_j]_{j=1 \sim n}$ 是 L^p 有界的, R_j 是 Riesz 变换, 则 $b \in \text{BMO}$. 由于 $(H^1)^* = \text{BMO}(\mathbf{R}^n)$, 所以上述结果也可以表达成, $gT(f) - fT^*(g) \in H^1, \forall f \in L^p, g \in L^q, 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1$. Deng 等^[2] 用小波分析的方法对 $fTg - gT^*f$ 证明了类似的结果, 其中 T 是弱核条件下 $C-Z$ 算子. 本文正是在此基础上, 把结果推广到了分数次积分算子上, 给出了 Chanillo 定理^[3] 的一个小波证明.

为叙述简单, 只在一维空间中讨论, 高维情形类似.

1 引理及主要结果

本文要证明的结果为以下定理.

定理 $\|fI^\alpha(g) - gI^\alpha(f)\|_{H^1} \leq C \|f\|_p \|g\|_q$, 其中, I^α 是分数次积分算子, $1 < p, q < \infty, 1/p + 1/q = 1 + \alpha, 0 < \alpha < 1$. 我们熟知的分数次积分算子是

$$I^\alpha f(x) = C/\gamma(\alpha) \int_{\mathbf{R}} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < 1$$

其中, $\gamma(\alpha) = \pi^{1/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) / \Gamma(1/2 - \alpha/2)$.

引理 1^[4]

(1) 如果 $0 < \alpha < 1, 1 < p_1, p_2 < \infty, 1/p_2 = 1/p_1 - \alpha$, 则 I^α 是 L^{p_1} 到 L^{p_2} 的有界算子.

(2) 如果 $0 < \alpha < 1, 1 < p_1, p_2 \leq 1, 1/p_2 = 1/p_1 - \alpha$, 则 I^α 是 H^{p_1} 到 H^{p_2} 的有界算子.

设 φ, ψ 分别是 1-正则的尺度函数与小波函数, 且都是紧支的, $\text{supp } \varphi \subset [-2^M, 2^M], \text{supp } \psi \subset [-2^M, 2^M], M > 0$.

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19631080)

收稿日期: 1999-07-01; 作者简介: 许明 (1972~), 男, 博士生.

引理 2^[5](1) $f \in L^p(\mathbf{R})$, $1 < p < \infty$ 当且仅当 $f = \sum_{jk} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$, $\alpha(j, k) = \langle f, \psi_k \rangle$, 并且

$$\left(\sum_{j,k} \alpha^2(j, k) \psi_k^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \in L^p \quad \text{或} \quad \left(\sum_{j,k} \alpha^2(j, k) \chi_{jk}^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \in L^p$$

(2) $f \in H^1(\mathbf{R})$, 当且仅当 $\left(\sum_{j,k} \alpha^2(j, k) \chi_{jk}^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \in L^1$ 或 $\left(\sum_{j,k} \alpha^2(j, k) \psi_k^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \in L^1$,其中 $\chi_{jk} = 2^{j/2} \chi(2^j x - k)$, χ 是 $[0, 1]$ 的特征函数.

定义 1^[2] 设 $-\infty < \alpha < +\infty$, $0 < p, q \leq \infty$, $\varphi_\nu, \nu \in \mathbf{Z}$, 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数族, 满足条件 $\varphi_\nu \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\text{supp } \varphi_\nu \subset \{\xi \in \mathbf{R}^n; 1/2 \leq 2^{-\nu} |\xi| \leq 2\}$, $|\varphi_\nu| \geq c > 0$, $3/5 \leq 2^{-\nu} |\xi| \leq 5/3$, $|\partial^\alpha \varphi_\nu| \leq C_\alpha 2^{-\nu|\alpha|}$, $|\alpha| \geq 0$, 定义齐次 Triebel-Lizorkin 空间 $F_p^{\alpha, q}$; 称 $f \in F_p^{\alpha, q}$, 如果 $\|f\|_{F_p^{\alpha, q}} = \left\| \left(\sum_{\nu \in \mathbf{Z}} 2^{\nu\alpha} |\varphi_\nu * f(x)|^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty$.

 $L^p = F_p^{0, 2}$ 是已知结果, 另外可以用小波刻画 $F_p^{\alpha, 2}$ 如下引理 3.引理 3^[5] 设 $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < 1$, 则 $f \in F_p^{\alpha, 2}$ 当且仅当它的小波系数 $\alpha(j, k) =$ $\langle f, \psi_k \rangle$ 满足 $\left(\sum_{j,k} (\alpha(j, k) 2^{j\alpha})^2 2^j \chi(2^j x - k) \right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbf{R})$, 其中 $\{\psi_k\}$ 是 1-正则的小波基, 或者当且仅当 $\left(\sum_{j,k} (\alpha(j, k) 2^{j\alpha})^2 2^j \psi(2^j x - k) \right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbf{R})$

引理 4(嵌入定理)^[6] 设 $0 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < r \leq \infty$ 且 $-\infty < s_1 < s_0 < +\infty$ 则 $F_{p_0}^{s_0, q} \subset F_{p_1}^{s_1, r}(\mathbf{R})$, 其中, $s_0 - 1/p_0 = s_1 - 1/p_1$.

2 定理的证明

利用投影算子 $Q_j = P_{j+1} - P_j$ 对函数进行非标准分解, 可得

$$fg = B_2(f, g) + B_3(f, g) + B_1(f, g) + B_1(g, f)$$

其中, $B_1(f, g) = \sum_j P_j f Q_j g = \sum_{j,k,k'} \tilde{\alpha}(j, k) \beta(j, k') \varphi_{jk}(x) \psi_{k'}(x)$, $B_2(f, g) = \sum_j \sum_{k \neq k'} \alpha(j, k) \beta(j, k') \psi_k(x) \psi_{k'}(x)$, $B_3(f, g) = \sum_{jk} \alpha(j, k) \beta(j, k) \psi_{jk}^2(x)$, $\alpha(j, k) = \langle f, \psi_k \rangle$, $\beta(j, k) = \langle g, \psi_k \rangle$, $\tilde{\alpha}(j, k) = \langle g, \varphi_{jk} \rangle$, $\beta(j, k) = \langle g, \varphi_{jk} \rangle$.

由上述分解, 可得

$$fI^\alpha(g) - gI^\alpha(f) = B_1(f, I^\alpha(g)) + B_1(I^\alpha(g), f) + B_2(f, I^\alpha(g)) + B_3(f, I^\alpha(g)) - B_1(g, I^\alpha(f)) - B_1(I^\alpha(f), g) - B_2(g, I^\alpha(f)) - B_3(g, I^\alpha(f))$$

引理 5^[7] $\|B_1(f, g)\|_{H^1} \leq C \|f\|_p \|g\|_{p'}$, $\|B_2(f, g)\|_{H^1} \leq C \|f\|_p \|g\|_{p'}$, $\forall f \in L^p, g \in L^{p'}, 1/p + 1/p' = 1, 1 < p, p' < \infty$.

推论 1 $\|B_1(f, I^\alpha g)\|_{H^1} \leq C \|f\|_p \|g\|_q$, $\|B_2(f, I^\alpha g)\|_{H^1} \leq C \|f\|_p \|g\|_q$, $\forall 1/p + 1/q = 1 + \alpha, 1 < p, q < +\infty$.

由推论 1 可知要证明定理, 只需证明 $B(f, g) = B_3(f, I^\alpha(g)) - B_3(g, I^\alpha(f))$ 满足定理的结果即可. 对 I^α 进行非标准分解, 可得

$$I^\alpha = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P_j I^\alpha Q_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Q_j I^\alpha P_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Q_j I^\alpha Q_j = I_1^\alpha + I_2^\alpha + I_3^\alpha$$

I_1, I_2, I_3 的分布核分别为:

$$K_1(x, y) = \sum_{j, k, l} a(j, k, l) \varphi_{jk}(x) \psi_l(y), \quad a(j, k, l) = \langle I^\alpha \psi_l, \varphi_{jk} \rangle,$$

$$K_2(x, y) = \sum_{j, k, l} b(j, k, l) \psi_k(x) \varphi_{jl}(y), \text{ 其中, } b(j, k, l) = \langle I^\alpha \varphi_{jl}, \psi_k \rangle,$$

$$K_3(x, y) = \sum_{j, k, l} c(j, k, l) \psi_k(x) \psi_l(y), \quad a(j, k, l) = \langle I^\alpha \psi_l, \psi_k \rangle.$$

引理 6 在上述假设下, 有 $|a(j, k, l)| \leq C 2^{-ja} / (1 + |k - l|)^{3-\alpha}$, $b(j, k, l), c(j, k, l)$ 类似.

证明 只证 $a(j, k, l)$ 的情况, 其它类似.

$$a(j, k, l) = \int \psi_l \varphi_{jk} / |x - y|^{1-\alpha} dx dy$$

(1) $|k - l| \leq 52^M$, 利用引理可得

$$|a(j, k, l)| \leq C 2^{-j(V/2 - Vp)} 2^{j(1 - 2 - Vp)} \leq C 2^{-ja}$$

(2) $|k - l| > 52^M$, 此时 φ_{jk} 与 ψ_l 不相交, 则利用 ψ 的一阶消失性, 可得

$$|a(j, k, l)| = \int 2^{-ja} \left[\frac{1}{|x - y + k - l|} - P(x, y) \right] \psi_l(y) \varphi(x) dx dy$$

其中, $P(x, y)$ 是 $\frac{1}{|x - y + k - l|}$ 的一阶泰勒展开式,

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq k \leq 1} \frac{D^k(g)(x + k - l)}{k!} y^k, \text{ 则}$$

$$|a(j, k, l)| = \left| \int 2^{-ja} \left[\frac{1}{|x - y + k - l|} - P(x, y) \right] \psi_l(y) \varphi(x) dx dy \right| \leq \\ C \int 2^{-ja} \frac{1}{|x + k - \theta y|} y^2 |\psi_l(y) \varphi(x)| dx dy \leq$$

$$C 2^{-ja} \int |k - l|^{3-\alpha} y^2 |\psi_l(y)| dy \leq C 2^{-ja} / |k - l|^{3-\alpha}, 0 < \theta < 1, |x - \theta y| \leq 42^M$$

引理 7 $\sum_k a(j, k, l) = 0$.

证明 对于尺度函数, 可以有 $\sum_k \varphi(x - k) = c$, 另外可以设 $\varphi(x) > 0$, 由引理 6 知道

$$\sum_k |a(j, k, l)| < \infty, \text{ 由此有 } \sum_k a(j, k, l) = c 2^{j/2} \int I^\alpha(\psi) dx.$$

由引理 2 的 (2), $I^\alpha(\psi) \in H^p$, 对于某个 $0 < p \leq 1$, 由 H^p 空间的函数的消失性, 可知:

$$\int I^\alpha(\psi) dx = 0, \text{ 所以 } \sum_k a(j, k, l) = 0. \text{ 证毕.}$$

$$\text{设 } a_R(j, k, l) = \begin{cases} a(j, k, l) & 2^R \leq |k - l| \leq 2^{R+1} \\ - \sum_{m: 2^R \leq |m - l| \leq 2^{R+1}} a(j, m, l) & k = l \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

引理 8 上述假设下, $\|B_R^{(1)}(f, g)\| \leq C R^{2 + [Vp - 1/2]} 2^{-R(1-\alpha)} \|f\|_p \|g\|_q$, 其中, $1/p + 1/q = 1 + \alpha, 1 < p, q < \infty$ 另外 $A(R) = \sup_{j, k, l} \sum_{2^R \leq |k - l| \leq 2^{R+1}} \{ |a(j, k, l)| + |a(j, l, k)| \}$.

证明 $B_R^{(1)}(f, g) = \sum_{j, k, l} \alpha(j', k') \beta(j, l) \langle \sum_k a_R(j, k, l) \varphi_{jk}, \psi_{j'k'} \rangle (\psi_{k'k} - \psi_{ll})$. 这是

因为当且仅当 $j > j', \langle \varphi_k, \psi'_{j'k} \rangle \neq 0$, 又由于 φ, ψ 有紧支集 $[-2^M, 2^M]$, 所以存在 k, k' 满足 $2^{j-j'}(k' - 2^M) - 2^M \leq k \leq 2^{j-j'}(k' + 2^M)$.

在文[7]中, 已知 $\|\varphi_{jk'} - \varphi_{jl}\|_{H^1} \leq C(|j - j'| + \log(2 + |k - l|))$, 因此

$$\|B_R^{(1)}(f, g)\|_{H^1} \leq C \left(\sum_{0 < j-j' \leq R} + \sum_{j-j' \geq R+1} \right) \sum_{k,l} |\alpha(j', k')\beta(j, l)|.$$

$$\left| \left\langle \sum_k a_R(j, k, l) \varphi_{jk}, \psi'_{j'k} \right\rangle \right| \cdot (|j - j'| + \log(2 + |k - l|)) = I + II.$$

$$\int g_{jl}(x) dx = \int_{-\infty}^x \sum_k a_R(j, k, l) \varphi(y - k) dy, \quad \|g_{jl}\|_{\infty} \leq A(R), \quad \text{supp } g_{jl} \subset [l - 2^{R+1} - 2^M, l + 2^{R+1} + 2^M], \quad \left| \sum_l g_{jl}(x) \right| \leq C 2^{j-j'} A(R),$$

由于 $2^R \leq |k - l| \leq 2^{R+1}, j - j' \geq R + 1$, 则 $|j - j'| + \log(2 + |k - l|) \leq R + 1 \leq |j - j'|$, 故

$$\begin{aligned} II &\leq \sum_{j-j' \geq R+1} \sum_{k,l} |\alpha(j', k')\beta(j, l)| \leq g_{jl}, \quad \psi'(2^{j-j'}y - k') > 2^{\frac{j-j'}{2}-3} |j - j'| \leq \\ &\sum_{m=R+1}^{\infty} m 2^{-\frac{3}{2}m} \left[\int_R \left(\sum_{j,k,l} \alpha^2(j', k') \chi_{j+m,l}^2 \right)^{\frac{p'}{2}} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \\ &\left[\int_R \left(\sum_{j,k,l} \beta^2(j', k') \langle g'_{j+m,l}, \psi(2^{-m}y - k') \rangle |\chi_{j+m,l}^2| \right)^{\frac{p'}{2}} dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\sum_{m=R+1}^{\infty} m 2^{-\frac{3}{2}m} II_m II'_m \end{aligned}$$

由引理6, 易知 $A(R) \leq \frac{C 2^{-j\alpha}}{2^{R(2-\alpha)}}$, 又因为 $\sum_k \psi(2^{-m}y - k') \leq c$, 有

$$II'_m \leq C 2^{-R(1-\alpha)} \left[\int_R \left(\sum_{j,l} \beta^2(j' + m, l) 2^{-2kl} \chi_{j+m,l}^2 \right)^{\frac{p'}{2}} dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq C 2^{-R(1-\alpha)} \|g\|_{F_p^{-\alpha, 2}}.$$

又由引理4, 可得 $II'_m \leq C 2^{-R(1-\alpha)} \|g\|_{F_p^{0, 2}}$, 其中, $1/p + 1/q = 1 + \alpha$.

$$\text{又因为 } \text{supp} \sum_l \chi(2^{j'+m}x - l) \subset \left[\frac{k' - 2^{R-(m-1)}}{2^{j'}}, \frac{k' + 2^{R-(m-1)}}{2^{j'}} \right],$$

$$II_m \leq 2^{\frac{m}{2}} \left[\int_R \left(\sum_{j,k} \alpha^2(j', k') \chi_{j,k-1}^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx \right]^{\frac{1}{q}} + 2^{\frac{m}{2}} \left[\int_R \left(\sum_{j,k} \alpha^2(j', k') \chi_{j,k}^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{m}{2}} \|f\|_p.$$

$$\text{故 } II \leq C \sum_{m=R+1}^{\infty} m 2^{-mR(1-\alpha)} \|f\|_p \|g\|_q \leq C 2^{-R(1-\alpha)} \|f\|_p \|g\|_q.$$

现在估计 I , 注意到 $|j - j'| + \log(2 + |k - l|) \leq CR$, 有

$$\begin{aligned} I &\leq CR \sum_{m=1}^R \sum_j \int_R \sum_{k,l} |\alpha(j', k')\beta(j' + m, l)| \cdot \\ &\left| \left\langle \sum_k \alpha_R(j' + m, k, l) \varphi_{j'+m,k}, \psi'_{j'k} \right\rangle \right| \varphi_{jk'} dx \leq \\ &CR \sum_{m=1}^R 2^{-m\alpha} \int_R \left(\sum_{j,k} \alpha^2(j', k') 2^{-2j'\alpha} \varphi_{jk'} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$CR \|f\|_{F_q^{-\alpha, 2}} \sum_{m=1}^R 2^{-m\alpha} 2^{-m(V/2-V'q)} \left[\int_R \left\{ \sum_{j,k} \left(\sum_l |\beta(j' + m, l)| \cdot \right. \right. \right.$$

$$\left| \left\langle \sum_k \alpha_R(j' + m, k, l) \varphi_{j'+m, k} \psi_{j'k'} \right\rangle \right|^2 2^{2(j'+m)\alpha} \varphi_{j'+m, k'}^2 \left. \right\}^{\frac{q}{2}} dx \Big)^{\frac{1}{q}}$$

同样利用嵌入定理, 可得 $I \leq CR \|f\|_{L^p} \sum_{m=1}^R 2^{-m\alpha} I_m$,

文[7]中, 已知 $I_m \leq R^{|1/q-1/2|} 2^{-R(2-\alpha)} \|g\|_q$, 故最后得到

$$I \leq CR^{2+|1/q-1/2|} 2^{-R(1-\alpha)} \|f\|_p \|g\|_q, \quad 1/p + 1/q = 1 + \alpha, \quad 1 < p, q < \infty.$$

对 R 求和, 定理从以上引理立即可得.

致谢: 作者感谢邓东皋教授和颜立新副教授的指导和帮助.

参考文献:

- [1] COIFMANN R, ROCHBERG, WEISS G. Factorization theorem for Hardy spaces in several variables[J]. Ann of Math, 1976, 103: 611 ~ 635.
- [2] 程民德, 邓东皋, 龙瑞麟. 实分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993. 436 ~ 437.
- [3] CHANILLO S. A note on commutators[J]. Indiana Univ Math J, 1982, 31: 7 ~ 6.
- [4] 邓东皋, 韩永生. H^p 空间论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992. 196 ~ 200.
- [5] MEYER Y. Ondelettes et operateurs(I, II)[M]. New York: Hermann, 1991. 216 ~ 275.
- [6] TRIEBEL H. Theory of function spaces[M]. Basel: Birkhauser Verlag, 1983. 129 ~ 130.
- [7] DENG D G, YAN L X. L^p boundedness of commutators of Calderon-Zygmund singular integral operators[J]. Adv in Math, 1998, 27(3): 259 ~ 269.

H^1 Boundedness of Commutators of Fractional Integral Operators

*
XU Ming

Abstract: By wavelet analysis, it's shown that $\|fI^\alpha(g) - gI^\alpha(f)\|_{H^1} \leq C \|f\|_p \|g\|_q$, where $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, I^α is a fractional integral operator.

Keywords: fractional integral operator; wavelet; Hardy spaces