

文章编号: 0529-6579 (2000) S2-0018-03

一类三次 Lienard 方程的极限环分析*

胡军胜

(湛江海洋大学, 广东 湛江 524025)

摘要: 分析了一类特殊的三次 Lienard 方程, 对其极限环的存在性问题得到了几个结果.

关键词: Lienard 方程; 极限环

中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A

一般地, 三次 Lienard 方程具有形式:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

这里, $f(x) = a + 2\beta x + 3cx^2$, $g(x) = ax + bx^2 + \gamma x^3$. 它在 Lienard 平面上等价于:

$$\dot{x} = y - (ax + \beta x^2 + cx^3), \dot{y} = -(ax + bx^2 + \gamma x^3);$$

该系统具有 6 个参数, 这些参数的不同取值决定着系统极限环的不同分布状况. 本文仅就“ $b = 0, ac \neq 0$ ”这一情况而对系统 $\dot{x} = y - (ax + \beta x^2 + cx^3), \dot{y} = -(ax + \gamma x^3)$ 的极限环存在问题作一定性分析.

注意到这一系统的发散量为 $\text{div} = -(a + 2\beta x + 3cx^2)$, 因此如有 $4\beta^2 - 12ac \leq 0$, 则系统在全平面上没有任何闭轨线^[1]. 鉴于此, 在此限定“ $ac < 0$ ”, 并且可不妨让“ $a > 0, c < 0$ ”(否则, 可通过变换 $x \rightarrow -x, t \rightarrow -t$ 达到), 为简化讨论进一步让 $a = 1, c = -1$, 这样上述系统就成为

$$\dot{x} = y - (x + \beta x^2 - x^3), \dot{y} = -(x + \gamma x^3) \quad (1)$$

1 $\alpha \neq 0, \gamma = 0$ 的情况

此时系统 (1) 成为

$$\dot{x} = y - (x + \beta x^2 - x^3), \dot{y} = -\alpha x \quad (2)$$

定理 1 系统 (2) 在全平面上当 $\alpha < 0$ 时没有任何闭轨线, 而当 $\alpha > 0$ 时至多只有一个极限环.

证明 系统 (2) 在全平面上只有唯一奇点 $O(0,0)$. 当 $\alpha < 0$ 时, 由于 $O(0,0)$ 是鞍点, 因此没有任何闭轨线. 当 $\alpha > 0$ 时, $f(x) \triangleq 1 + 2\beta x - 3x^2, g(x) = \alpha x$, 由 $f(0) = 1 > 0$ 知奇点 $O(0,0)$ 是稳定的焦点; 而由 $\left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{1}{\alpha}\left(3 + \frac{1}{x^2}\right) < 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ 不增可知, 只要仿照文[2]定理 4.6 的证明过程, 即可证得系统 (2) 至多有一个极限环.

* 收稿日期: 2000-10-15 作者简介: 胡军胜 (1964~), 男, 硕士, 讲师.

2 $\alpha = 0, \gamma \neq 0$ 的情况

此时系统(1)成为

$$\dot{x} = y - (x + \beta x^2 - x^3), \dot{y} = -\gamma x^3 \quad (3)$$

定理2 系统(3)在全平面上当 $\gamma < 0$ 时没有任何闭轨线, 而当 $\gamma > 0$ 时至少会有一个极限环.

证明 系统(3)在全平面上只有唯一奇点 $O(0,0)$. 当 $\gamma < 0$ 时, 由于 $O(0,0)$ 是鞍点, 因此没有任何闭轨线. 当 $\gamma > 0$ 时, 此时 $O(0,0)$ 是不稳定结点, 同时易知系统(3)具有远离型无穷远奇点^[2], 因此由 Bendixson 环域定理即知系统(3)至少会有一个极限环.

3 $\alpha\gamma > 0$ 的情况

1) 如 $\alpha < 0 (\gamma < 0)$, 则由于此时系统(1)的唯一奇点 $O(0,0)$ 是鞍点, 因此系统(1)在全平面上没有任何闭轨线.

2) 如 $\alpha > 0 (\gamma > 0)$, 为简单起见让 $\alpha = \gamma = 1$, 则此时系统(1)成为

$$\dot{x} = y - (x + \beta x^2 - x^3), \dot{y} = -x(1 + x^2) \quad (4)$$

定理3 系统(4)在全平面上存在极限环.

证明 首先用变换 $x \rightarrow -x, t \rightarrow -t$ 将系统(4)变成

$$\dot{x} = y - (-x + \beta x^2 + x^3), \dot{y} = -x(1 + x^2)$$

它的唯一奇点 $O(0,0)$ 相应变成不稳定焦点; 此时类似于定理2的做法, 由此系统具有远离型无穷远奇点即知, 此系统、从而系统(4)在全平面上存在极限环.

4 $\alpha\gamma < 0$ 的情况

1) 如 $\alpha > 0 (\gamma < 0)$, 为简单起见, 让 $\alpha = 1, \gamma = -1$, 此时系统(1)成为

$$\dot{x} = y - (x + \beta x^2 - x^3), \dot{y} = -x(1 - x^2) \quad (5)$$

它有3个奇点: $O(0,0)$ 是稳定焦点, $A(1, \beta)$ 与 $B(-1, \beta)$ 都是鞍点. 注意到直线 $x = 1$ 在 $y > \beta$ 和 $y < \beta$ 部分均是无切的, 而点 $A(1, \beta)$ 又是鞍点, 故系统(5)可能的闭轨线必定位于直线 $x = 1$ 的左侧; 同理, 也必定要位于直线 $x = -1$ 的右侧. 因此, 只要在带域 $G = \{(x, y) | -1 < x < 1, y \in \mathbb{R}\}$ 内考虑系统(5)可能的任何闭轨线.

定理4 系统(5)在全平面上没有任何闭轨线.

证明 以下设 $-1 < x < 1$, 并且记

$$F(x) = x + \beta x^2 - x^3, G(x) = \int_0^x g(x) dx = \int_0^x x(1 - x^2) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

按熟知的方法, 只要联立方程组 $F(x_1) = F(x_2), G(x_1) = G(x_2)$ 在 $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ 内无解, 系统(5)就在带域 G 内, 从而在全平面上没有任何闭轨线. 以下反证之:

由 $G(x_1) = G(x_2)$ 可得: $(x_1^2 - x_2^2)[2 - (x_1^2 + x_2^2)] = 0$, 因为 $x_1^2 < 1, x_2^2 < 1$, 因此, 有 $x_2 = -x_1$; 此时如将 $x_2 = -x_1$ 代入 $F(x_1) = F(x_2)$, 则可得: $x_1(1 - x_1^2) = 0$, 这不可能. 此即说明上述联立方程组确在 $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ 内无解, 从而得证.

2) 如 $\alpha < 0 (\gamma > 0)$, 为简单起见让 $\alpha = -1, \gamma = 1$, 则此时系统(1)成为

$$\dot{x} = y - (x + \beta x^2 - x^3), \dot{y} = -x(x^2 - 1) \quad (6)$$

它有3个奇点: $O(0,0)$ 是鞍点, $A(1, \beta)$ 与 $B(-1, \beta)$ 均是指标为 +1 的初等奇点.

定理5 当 $0 < \beta \leq 1$ 时系统(6)必存在同时包含3个奇点 O, A, B 在其内部的大极限环.

证明 首先, 当 $0 < \beta \leq 1$ 时初等奇点 $A(1, \beta)$ 与 $B(-1, \beta)$ 均不稳定; 其次, 易知系统 (6) 的一切解对 $t \geq 0$ 都是有界的^[3]; 再次, 当 $0 < \beta \leq 1$ 时, 如取 Dulac 函数 $B(x, y) = \exp\{(3 - \beta)y\}$, 则可说明系统 (6) 没有单含奇点 $A(1, \beta)$ 的闭轨线; 同理说明系统 (6) 也没有单含奇点 $B(-1, \beta)$ 的闭轨线. 于是, 综合上面 3 点即知系统 (6) 必存在同时包含三个奇点 O, A, B 在其内部的大极限环.

参考文献:

- [1] 叶彦谦. 极限环论. 上海: 上海科学技术出版社, 1984. 16.
- [2] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985. 416 ~ 419.
- [3] 韩茂安. 二维 Lienard 系统的研究方法和结果. 南开大学数学研究所动力系统年多项式微分系统定性理论讨论班报告. 天津: 南开大学数学研究所, 67 ~ 73.

Limit Cycles Analysis to a Class of Cubic Lienard Equations

HU Jun-sheng^{*}

Abstract: A class of special cubic Lienard equations is analysed, and several results for the existence of limit cycles are obtained.

Keywords: Lienard equation; limit cycles

^{*} Zhanjiang Ocean University, Zhanjiang Guangdong 524025, China