

环形和线形四体系统的耦合振动模式*

黎培进, 王华生

(中山大学物理学系, 广州 510275)

摘 要: 研究环上和线上 4 个线性耦合振子系统的集体运动, 描述系统内各振子之间的关联振动方式.

关键词: 四体问题; 内部运动模式; 四边形结构; 共线结构

中图分类号: O325 **文献标识码:** A

对少粒子微观体系内集体运动现象的研究, 是物理学的一个重要课题^[1]. 为丰富人们对复杂系统的知识, 也需要对宏观少质点系统的集体运动方式作具体研究. 本文目的是定性探讨存在于较简单的四体系统中诸质点的运动模式. 讨论中仅限于简谐运动, 不计及非线性运动.

1 方 法

所用方法与以前工作相似^[2]. 设系统内顺数第 i 个质点的振动位移为 $s_i = a_i \sin(\omega t + \varphi)$, 用代数方法解析求解运动方程组, 得到系统作集体振动的各个频率和简并度, 以及相应的特征矢量 $\{a_i\}$; 再用对称性方法定性检验所得结果的正确性, 可确定系统的运动模式.

2 结果与分析

每个频率的 $\{a_i\}$ 含有各质点作小振动的相对振幅和相对相位的信息.

2.1 环形四全同质点系统

这是四体系统的简单情形: 光滑水平圆周上由劲度系数为 k 的轻弹簧连接 4 个质量均为 m 的质点; 开始时系统的平衡构形为正方形. 由经典力学方法得出, 体系除存在零频率 (ω_1) 外, 还有 3 个简正频率: $\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{2}\omega_0$, $\omega_4 = 2\omega_0$. 其中, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 是单个谐振子的频率. 较小的频率是二重简并的. 用文 [2] 的做法不难求出, 与 ω_2, ω_3 对应的满足正交归一化条件的本征矢有 2 组, 其中一组为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{对 } \omega_2: a_1 = a_3 = 0, a_2 = -a_4 = \pm 1/\sqrt{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{对 } \omega_3: a_1 = -a_3 = \pm 1/\sqrt{2}, a_2 = a_4 = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

* 基金项目: 国家理科基地创建名牌课程资助项目; 广东省重点课程建设资助项目

收稿日期: 2000-04-14; 作者简介: 黎培进 (1963~), 男, 博士.

图1a给出了(1)式的运动图像,这是 ω_2 的最简单的模式,本文称其为筝形模式,这时一条对角线上的质点(1,3)不动,另一对角线上的质点(2,4)同步地沿着左右圆弧作前后振动,结果,系统就从前凸筝形→正方形→后凸筝形,再反过来,从后凸筝形→正方形→前凸筝形,变动中,两条对角线始终保持垂直。(2)式代表的运动图像见图1b,它是 ω_3 的最简单的模式,也是筝形模式,不过此时质点2,4不动,而1,3则沿着前后圆弧作左右振动。

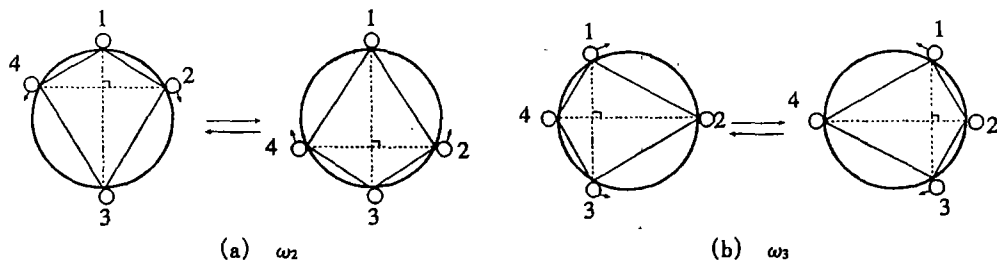


图1 ω_2, ω_3 的筝形模式

箭头代表运动方向

ω_2, ω_3 的另一组本征矢为

$$\begin{cases} \text{对 } \omega_2: a_1 = -a_3 = \cos \alpha / \sqrt{2}, a_2 = -a_4 = \sin \alpha / \sqrt{2} \\ \text{对 } \omega_3: a_1 = -a_3 = -\sin \alpha / \sqrt{2}, a_2 = a_4 = \cos \alpha / \sqrt{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

这里 $0 < \alpha < 2\pi$, 且 $\alpha \neq \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 。(3),(4)式对应的一般模式见图2a,特点是:4个质点都在动,但始终保持两对角线垂直(这是 ω_2, ω_3 的运动模式中的一个共同点);这种四边形构形的4条边可以互不相等,但仍然保持两组对边所对应的外接圆弧之和相等(即 $s_{12} + s_{34} = s_{23} + s_{14}$),本文把这种模式称为调和四角形模式。注意,当 $\alpha = \pm \pi/4, \pm 3\pi/4$ 时,出现一种特殊模式,叫等腰梯形模式(图2b),此时系统在前凸等腰梯形—正方形—后凸等腰梯形之间变动。

$$\text{对 } \omega_4: a_1 = -a_2 = a_3 = -a_4 = \pm 1/2 \quad (5)$$

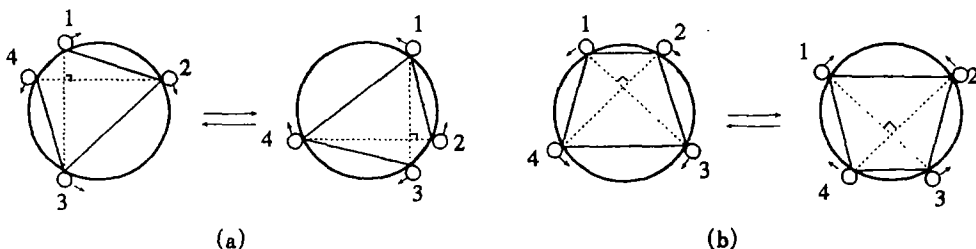


图2 ω_2, ω_3 的另一组运动模式

a 调和四角形模式; b 等腰梯形模式

图3给出了 ω_4 的振动模式,称为矩形模式,此时系统的形状在窄矩形—正方形—扁矩形之间变化,且4个质点的运动都同步。

注意,类似图2b和图3的模式都可以在某些量子力学体系(如4个价电子原子^[3])中找到。当然,文[3]中的电子与电子间可以发生碰撞,与本文结果相比,还稍有不同。这种相似性说明,对于服从不同的动力学规律和有不同相互作用的各种物质层次的

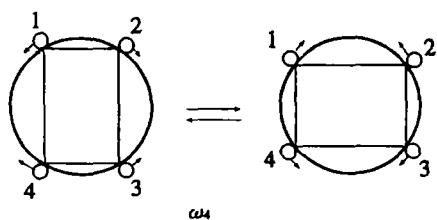
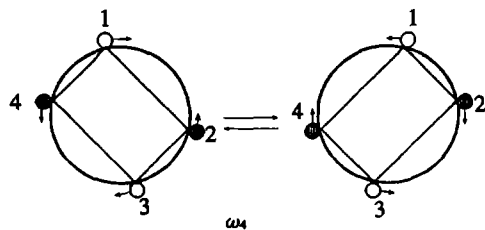
图3 矩形模式 (ω_4)

图4 有质量效应的矩形模式

少体系统, 在确定其内部运动模式时, 一些处于更高层次的共同的对称性原理在起重要的作用. 近年来, 用对称性方法定性分析量子力学少体问题已成为一种有效的新方法^[4].

2.2 环形复式四质点系统

为了解质量效应问题, 现讨论环上 A_2B_2 型系统. 记 $m_1 = m_3 = m_A$, $m_2 = m_4 = m_B$, 解出来的简正频率为 $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m_B}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m_A}}$, $\omega_4 = \sqrt{2k\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right)}$, 不出现简并现象, 因为这个系统的对称性降低了. 由文 [2] 的方法可得出, 带权正交归一化的各本征矢为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{对 } \omega_2: a_1 = a_3 = 0, a_2 = -a_4 = \pm \frac{1}{\sqrt{2m_B}} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{对 } \omega_3: a_1 = -a_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2m_A}}, a_2 = a_4 = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{对 } \omega_4: a_1 = a_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2m_A(1+m_A/m_B)}}, a_2 = a_4 = -\frac{m_A}{m_B}a_1 \end{array} \right. \quad (8)$$

此时 ω_2 , ω_3 的振动模式也是矩形模式 (见图 1), 其特征主要由轴对称性决定; ω_4 的振动模式也是矩形模式 (图 4), 但与图 3 稍有区别, 这里有质量效应, 即 m_A 质点组 (1, 3) 与 m_B 质点组 (2, 4) 中, 以轻质点组的振动为主, 重质点组的振动不显著, 这一点与环上 A_2B 型系统的扭转模式类似^[2].

2.3 线形四全同质点系统

作为对比, 现在看一下线形四体系统的一些特点. 为此, 考虑最简单的情形: 4 个质点的质量都一样, 这时, 系统的简正频率有低频、中频、高频 3 种: $\omega_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0$, $\omega_3 = \sqrt{2}\omega_0$, $\omega_4 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0$, 频率简并性解除了. 可以求出, 满足正交归一化条件的各本征矢为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{对 } \omega_2: a_1 = -a_4 = \pm \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}, a_2 = -a_3 = (\sqrt{2}-1)a_1 \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{对 } \omega_3: a_1 = -a_2 = -a_3 = a_4 = \pm \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{对 } \omega_4: a_1 = -a_4 = \pm \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}, a_2 = -a_3 = -(\sqrt{2}+1)a_1 \end{array} \right. \quad (11)$$

图 5 给出了每个频率的线振动图像. ω_2 代表的是简单类“呼吸”模式: 左右各 2 个质点向中心收缩或向外扩张, 其中 1 与 4 同步, 2 与 3 同步, 但 1 与 2 或 3 与 4 不同步. ω_3 代表的是反对称振动模式: 各质点皆同步, 但两端的质点与中间的质点作反相位的振动.

ω_4 反映的是较复杂的模式,称为多级类呼吸模式:4个质点分为(1,2), (3,4), (1,4), (2,3)四组,每组的2个质点作简单的(类)“呼吸”运动,其中(1,4)和(2,3)的“呼吸”振动是严格的,(1,2)与(3,4)的是不严格的.

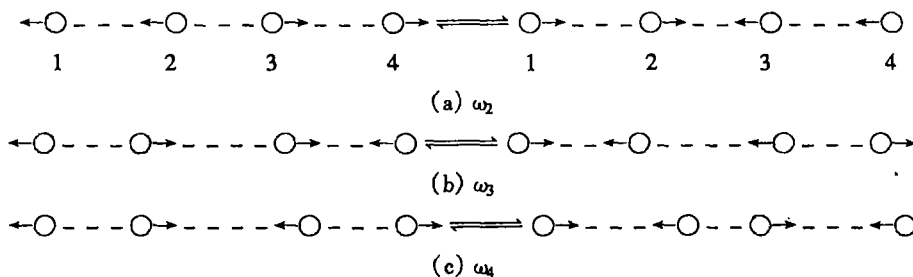


图5 线振动的3个简正模图像

3 结 语

探索物质系统的内部运动特征是少体物理的一项重要工作.前面描述了几个较为简单、典型的一维(环)四体系统的简正振动过程,从中可以看出,质点间的相对运动是有耦合的,再加上对称性的效应,体系的内部振动会有一定的模式.本文的结果有助于理解微观四体系统的内部运动图像.当然,有些源于量子效应的结果只能从微观动力学方程的求解中得出.

感谢与鲍诚光先生和周烈生先生的有益讨论.

参考文献:

- [1] LI P J, BAO C G, LIM T K. Preferred shapes and modes of internal motion in a four-boson system. *Few-Body Syst*, 1990 (9): 11~23.
- [2] 黎培进, 王华生. 一维环上 A_2B 型系统的简正模. *物理通报*, 1998 (9): 6~8.
- [3] BAO C G, DUAN Y W. Coplanar structures in $L=0$ even-parity intrashell states of four-valence-electron atoms. *Phys Rev*, 1994, A49 (2): 818~824.
- [4] BAO C G, HUI P, HE Y Z. Ground rotation band of a 6-boson system. *Chin Phys Lett*, 1999, 16 (12): 891~893.

Modes of Coupled Oscillations inside Four-Body Systems on A Ring and A Chain

LI Pei-jin^{*}, WANG Hua-sheng

Abstract: The collective motions inside systems of four linearly coupled oscillators in a ring or a line are investigated. The modes of correlated vibrations for internal oscillators are described.

^{*} Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China