

纯滞后 MIMO 离散系统建模及数字仿真^{*}

吕志民, 蔡绿欣, 周茂林

(中山大学电子与通信工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 针对纯滞后 MIMO 连续系统模型按常规方法离散化, 所得的离散模型不适用于数字控制系统, 提出基于 MATLAB 语言的 CACSD, 求出相关的增广矩阵, 重构标准的离散数学模型. 仿真研究证实此方法的正确性.

关键词: MIMO 系统; 建模; 纯滞后; 数字仿真; 离散化

中图分类号: TP217.82; TP273.3 **文献标识码:** A

纯滞后多输入多输出 (MIMO) 连续系统模型, 是数字控制系统中的被控对象, 若考虑其输入具有零阶保持特性, 对连续状态空间方程直接求解, 可导出相应的离散状态方程, 它就是带零阶保持器连续对象离散化的描述^[1]. 由于离散后控制向量仍含有滞后节拍, 此时的状态方程还不能直接用于数字控制系统中^[2]. 本文介绍使用增加状态空间变量的方法, 与导出的状态方程联立, 借助 MATLAB 语言的控制系统计算机辅助设计 (CACSD) 功能^[3], 求出相关的增广矩阵, 重构标准的离散系统状态空间方程, 使控制向量只与本次采样时刻有关. 用离散数学模型构成闭环系统, 在单位阶跃作用下, 其输出序列的理论值, 与仿真输出特性曲线比较, 结果完全一致, 证明上述方法的正确性.

1 纯滞后 MIMO 离散系统建模

在 MIMO 连续系统中, 控制信号在传输过程产生滞后, 其系统状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{F}x(t) + \mathbf{G}u(t - \lambda) \\ y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 为连续状态空间表达式系数矩阵, $x(t)$ 为 n 维向量, $u(t)$ 为 m 维向量, $y(t)$ 为 p 维向量, λ 为滞后时间, 假设

$$\lambda = lT - \tau, \text{ 而且 } l \geq 1, 0 \leq \tau < T$$

T 为采样周期, l 为整数, 滞后时间 λ 不一定为采样周期整数倍, $\mathbf{D}$ 为 $m \times p$ 阶零矩阵.

在零阶保持的输入作用下, 系统状态方程的离散形式为

$$x(k+1) = e^{\mathbf{F}T}x(k) + \int_0^\tau e^{\mathbf{F}\eta} d\eta \mathbf{G}u(k-l+1) + \int_\tau^T e^{\mathbf{F}\eta} d\eta \mathbf{G}u(k-l) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}_1 u(k-l) + \mathbf{B}_2 u(k-l+1) \quad (2)$$

$$\text{式中, } \mathbf{A} = e^{\mathbf{F}T}, \mathbf{B}_1 = \int_\tau^T e^{\mathbf{F}\eta} d\eta \mathbf{G}, \mathbf{B}_2 = \int_0^\tau e^{\mathbf{F}\eta} d\eta \mathbf{G} \quad (3)$$

式(2)控制向量 u 含有滞后节拍, 不适合用于数字控制系统. 为了使控制向量只与本次采样

^{*} 收稿日期: 2000-03-21; 作者简介: 吕志民 (1964~), 男, 副教授.

时刻有关,为此,增加新的状态变量,令

$$\begin{cases} x_{n+1}(k) = u(k-l) \\ x_{n+2}(k) = u(k-l+1) \\ \vdots \\ x_{n+l}(k) = u(k-1) \end{cases} \tag{4}$$

上式和式(2)联立,得增广状态空间表达式

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) = \bar{C}\bar{x}(k) \end{cases} \tag{5}$$

其中, $\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_{n+1}(k) \\ \vdots \\ x_{n+l}(k) \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{C} = [C \ 0 \ \cdots \ 0]$

在滞后时间 $\tau \neq 0$ 的情况下, $\bar{x}$ 状态变量扩展至 $n + ml = q$ 维, $\bar{A}$ 为 $q \times q$ 状态矩阵, $\bar{B}$ 为 $q \times m$ 控制矩阵, $\bar{C}$ 为 $p \times q$ 输出矩阵. 在 $\tau = 0$ 时, $q = n + m(l-1)$, $\bar{x}$ 向量和各矩阵的维数作相应改变.

2 纯滞后 MIMO 离散系统数字仿真

对于带有纯滞后的 MIMO 连续系统, 设其状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t-\lambda) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + [0] u(t) \end{cases} \tag{6}$$

选取采样周期 $T = 0.1 \text{ s}$, 滞后时间 $\lambda = 0.37$, 即 $l = 4$, $\tau = 0.03$, 根据可控性理论分析, 系统完全可控. 由于 $\tau \neq 0$, $q = n + ml = 11$, 式(5) 状态向量和各增广矩阵分别为

$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{11}(k) \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.9998 & -0.0047 & -0.0903 & 0.0655 & 0.0656 & 0.0296 & 0.0296 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0997 & 0.9905 & -0.1853 & 0.1353 & 0.0656 & 0.0595 & 0.0296 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0047 & 0.0903 & 0.8098 & 0.0698 & 0.0656 & 0.0300 & 0.0296 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\bar{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

至此, 纯滞后 MIMO 连续对象对应的离散数学模型唯一确定。

用离散模型构成闭环反馈系统, 借助 MATLAB 的 `dstep` 命令^[4], 求得在单位阶跃序列 $r_1(k)$ 与 $r_2(k)$ 作用下, 输出序列 $y_1(k)$ 、 $y_2(k)$ 前 15 个采样值如表 1 所示。

表 1 单位阶跃作用下系统输出的采样值

Tah 1 The sampled data of system outputs to an unit-step

采样节拍	$r_1(k)-y_1(k)$	$r_2(k)-y_2(k)$	采样节拍	$r_1(k)-y_1(k)$	$r_2(k)-y_2(k)$
0	0	0	8	0.417 3	0.348 6
1	0	0	9	0.501 6	0.405 1
2	0	0	10	0.572 1	0.447 6
3	0	0	11	0.628 7	0.478 4
4	0.030 0	0.029 6	12	0.671 5	0.499 3
5	0.129 6	0.121 9	13	0.700 9	0.512 1
6	0.228 1	0.205 5	14	0.718 2	0.518 7
7	0.324 5	0.281 1			

使用 `simulink` 工具箱对上述闭环离散系统进行数字仿真^[4], 其结构方框图如图 1. 分别在其输入端加入单位阶跃信号, 系统输出特性曲线如图 2.

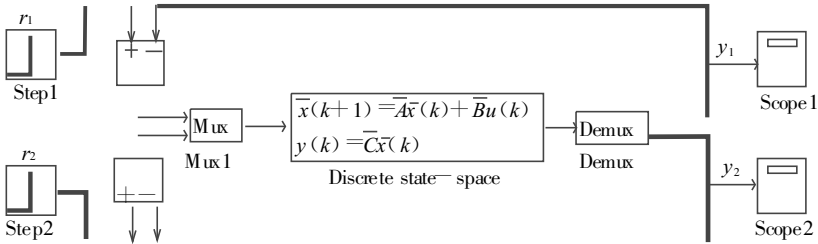


图 1 系统结构方框图

Fig 1 The block schematic diagram of system structure

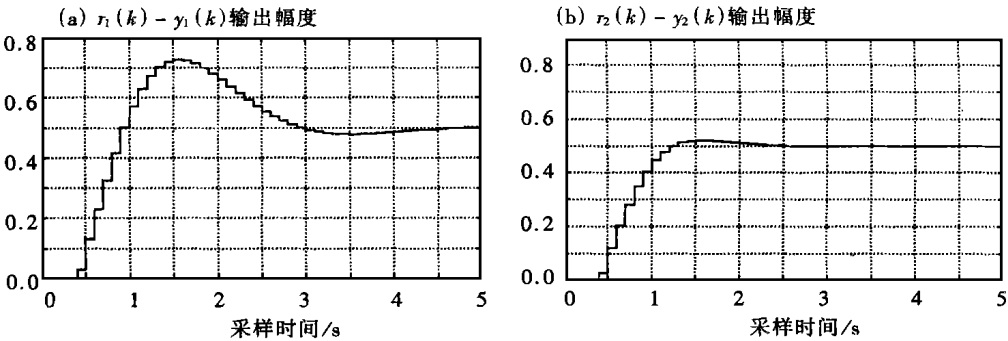


图 2 系统输出特性曲线

Fig 2 The characteristic curves of system outputs

比较表 1 与图 2, 理论计算与计算机仿真结果完全一致.

3 结 论

控制向量滞后的节拍数, 可以通过增加相应数目的状态向量给予补偿, 使增广状态空间表达式能直接用于数字控制系统. 所得的等效离散数学模型比原连续系统模型增加 ml 阶, 这是系统时间滞后导致的. 纯滞后时间 λ 比采样周期 T 大得多时, 增广矩阵的阶次将有很大扩充, 离散化建模将异常繁杂, 而且系统稳定性变差.

参考文献:

[1] JACQUOT R G. Modern digital control system[M]. Marcel Dekker Inc, 1981.
[2] 孙增圻, 袁曾任. 控制系统的计算机辅助设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.
[3] RIMVALL C M. Computer-aided control system design[J]. IEEE Control Systems Magazine (Special issue on CACSD), 1993, 13: 14~ 16.
[4] MOSCINSKI J. Advanced control with MATLAB and SIMULINK[M]. Ellis Horwood Limited, 1995.

Modeling and Digital Simulation of
MIMO Discrete System with Pure Time Delay

LÜ Zhi-min^{}, CAI Lu-xin, ZHOU Mao-lin*

Abstract: A method of the conversion of MIMO continuous state space models to discrete models with pure time delay in the input is presented by using the computer aided control system design based on MATLAB language. The research of simulation shows that this method is correct.

Keywords: MIMO system; modeling; pure time delay; digital simulation; discretization

^{*} Department of Electronics and Communication Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net