

随机环境中马氏链的泛函极限定理*

毕秋香¹, 李 炜²

(1. 中山大学, 广发证券公司博士后工作站, 广东 广州 510275;

2. 仲恺农业技术学院, 广东 广州 510225)

摘 要: 通过随机环境中马氏链的一般构造性定义, 在过程的矩满足一定的假设条件下, 利用截尾法及鞅收敛定理, 得到了随机环境中马氏链的一类泛函极限定理.

关键词: 随机环境; 马氏链; 极限定理

中图分类号: O211.62 **文献标识码:** A

关于齐次马氏链及非齐次马氏链的极限定理已有相当多的研究及结果, 而随机环境中的马氏链是近年来兴起的新课题, 对一些具体模型如随机环境中的随机游动, 随机环境中的分枝过程, 马氏环境中的生灭链等已有很多结果. Nawrotzki^[1]最早研究了平稳环境中马氏链的一般理论, Cogburn, R. 应用 Hopf 马氏链理论在文献 [2, 3] 中分别研究了平稳环境中马氏链的遍历理论及中心极限定理, 而涉及到类似于强大数定律的有关结果尚未见探讨, 本文通过随机环境中马氏链的一般构造性定义, 在过程的矩满足一定的假设条件下, 得到了随机环境中马氏链的一类泛函极限定理.

1 随机环境中马氏链的构造定义及性质

设 E 为有限或可列集, ϵ 为 E 的一切子集全体构成的 σ 代数, Z 及 Z_+ 分别表示全体整数及全体非负整数集, E^{Z_+}, ϵ^{Z_+} 分别表示乘积空间及相应的乘积 σ 代数.

设 M 表示 E 上的全体转移矩阵, 即 $M = \{m(x, y), x, y \in E\}$, $m(x, y)$ 为转移矩阵, 在 M 上赋弱拓扑定义一最小 σ 代数 $\mathcal{M}$, 使对任意固定的 $x, y \in E$, $m(x, y)$ 为 $\mathcal{M}$ 可测的; M^Z 及 $\mathcal{M}^Z$ 分别表示乘积空间及相应的乘积 σ 代数.

定义 1 设 Q 为 $(M^Z, \mathcal{M}^Z)$ 上的概率分布, $m = (m_k, k \in Z) \in M^Z, (M^Z, \mathcal{M}^Z, Q)$ 空间上的典型过程 $\eta_n(m) = m_n, n \in Z$ 称为环境过程, 称可测空间 $(M^Z, \mathcal{M}^Z)$ 为环境空间.

对 $x = (x_k, k \in Z^+) \in E^{Z^+}$, 及任意 E 上固定的概率测度 μ , 当 $0 < l < \infty$, 令

$$m(x, x_1, \dots, x_l) = \mu(x) m_0(x, x_1) m_1(x_1, x_2) \cdots m_{l-1}(x_{l-1}, x_l).$$

上式确定了 ϵ_0^l 上的分布, 由于 l 任意, 因此也确定了 ϵ^{Z^+} 上的一切有限维分布, 因而也唯一确定了 ϵ^{Z^+} 上的分布, 该分布记为 m_μ , 称 m_μ 是有初始分布 μ , 而取值于 E 的非齐次马氏链.

* 基金项目: 国家青年基金资助项目 (19901038); 广东省自然科学基金资助项目 (980287)

收稿日期: 2000-09-18; 作者简介: 毕秋香 (1965 ~), 女, 副教授; 研究方向: 随机环境中马氏链.

现设初始分布 μ 固定, 对任意 $\Gamma \in \mathcal{M}^Z, A \in \varepsilon^Z$, 令

$$\Omega = M^Z \times E^Z, \quad \mathcal{F} = \mathcal{M}^Z \times \varepsilon^Z,$$

$$P(\Gamma \times A) = \int_{\Gamma} m_{\mu}(A) Q(dm)$$

可以证明, 固定 $A \in \varepsilon^Z, m_{\mu}(A)$ 看成 m 的函数是 $\mathcal{M}^Z$ 可测的. 故上述定义有意义, 由测度扩张定理, P 可扩张成 $\mathcal{F}$ 上的一个概率测度, 为了方便, 仍记为 P .

定义 2 对任意 $m \in M^Z, x \in E^Z, \omega = (m, x), x$ 在时间 n 的坐标记为 x_n , 令 $X_n(\omega) = x_n, \{X_n(\omega), n \geq 0\}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程, 这个过程称为有初始分布 μ , 而取值于 E 的随机环境中的马氏链, 简记 MCRE, $(M^Z, \mathcal{M}^Z, Q)$ 称为环境空间.

设 $E, E_Q, E_{m_{\mu}}$ 分别表示概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P), (M^Z, \mathcal{M}^Z, Q), (E^Z, \varepsilon^Z, m_{\mu})$ 上的数学期望运算, 于是有 $E(\cdot) = E_Q(E_{m_{\mu}}(\cdot))$. 对随机环境中马氏链 X_n , 整体说来已不一定是马氏链. 一般不具有马氏性.

2 主要结果及证明

设 $\{g_n(x), n \geq 0\}$ 是 R^1 上一列正值, 连续的偶函数, 满足当 $|x|$ 增加时,

$$\frac{g_n(x)}{|x|} \uparrow, \frac{g_n(x)}{x^2} \downarrow, n \geq 0. \quad (1)$$

定理 设 $\{X_n(\omega), n \geq 0\}$ 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机环境中马氏链, 环境空间为 $(M^Z, \mathcal{M}^Z, Q)$, α 为 $\mathcal{M}^Z$ 的子 σ -代数, $\{f_n(\cdot), n \geq 0\}$ 是一列可测函数, $\{a_n, n \geq 0\}$ 是递增的正数序列, 若 $\{g_n(x), n \geq 0\}$ 满足条件 (1), 且设

$$A = \left\{ \omega: \omega \in \Omega, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(g_n(f_n(X_n(\omega)))) | \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1}))}{g_n(a_n)} < \infty \right\} \quad (2)$$

则有
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n(X_n) - E(f_n(X_n) | \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})))}{a_n}, \quad \text{在 } A \text{ 中 a.s. } P \text{ 收敛.} \quad (3)$$

进一步, 若有 $a_n \uparrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^n [f_m(X_m) - E(f_m(X_m) | \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{m-1}))] = 0, \text{ 在 } A \text{ 中 a.s. } P \text{ 收敛} \quad (4)$$

证明 设 k 为正整数, 记

$$Y_n = \frac{g_n(f_n(X_n))}{g_n(a_n)}, A_k = \left\{ \omega: \omega \in \Omega, \sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n | \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})) \leq k \right\},$$

则 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 令

$$f_n^*(X_n) = \begin{cases} f_n(X_n), & |f_n(X_n)| \leq a_n, \\ 0, & |f_n(X_n)| > a_n \end{cases}$$

$$\tau_k = \inf \left\{ n: n \geq 1, \sum_{i=1}^{n+1} E(Y_i | \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{i-1})) > k \right\}$$

则 $A_k = \{\tau_k = +\infty\}$, $\chi_{(\tau_k \geq n)}$ 关于 $\alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})$ 可测. 又

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{n=1}^{\tau_k} Y_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} E(E(\chi_{(\tau_k \geq n)} Y_n | \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1}))) = \\ &E\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{(\tau_k \geq n)} E(Y_n | \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})))\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E\left(\sum_{n=1}^{\tau_k} E(Y_n \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdots, X_{n-1}))\right) \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k} Y_n dP = \sum_{n=1}^{\infty} E\chi_{A_k} Y_n = E\left(\chi_{(\tau_k = +\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n\right) = E\left(\sum_{n=1}^{\tau_k} Y_n\right) \leq k \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_k(f_n^*(X_n) \neq f_n(X_n))) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k(|f_n(X_n)| > a_n)} dP \leq \\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k(|f_n(X_n)| > a_n)} \frac{g_n(f_n(X_n))}{g_n(a_n)} dP &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k} Y_n dP \leq k \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n(X_n) - f_n^*(X_n))}{a_n} \quad \text{在 } A_k \text{ 中从而在 } A \text{ 中 a.s. } P \text{ 收敛.} \quad (5)$$

又设

$$Z_m = \frac{(f_m^*(X_m) - E(f_m^*(X_m) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{m-1})))}{a_m}, \quad m \geq 1. \quad (6)$$

当 $\lambda \neq 0$ 时, 定义随机序列如下:

$$t_n(\lambda) = \frac{\exp\left(\lambda \sum_{m=1}^n Z_m\right)}{\prod_{m=1}^n E[\exp(\lambda Z_m) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{m-1})]}, \quad n \geq 1 \quad (7)$$

易知 $\{t_n(\lambda), n \geq 1\}$ 是关于 $\mathcal{M}^Z \times \varepsilon^Z$ 中的 σ 代数流 $\{\alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1}), n \geq 1\}$ 的鞅, 由鞅收敛定理知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\lambda) \quad \text{a.s. 存在且有限.} \quad (8)$$

又

$$\begin{aligned} E(Z_n^2 \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})) &= \\ E \frac{[f_n^*(X_n)]^2 \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdots, X_{n-1}) - (E(f_n^*(X_n) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})))^2}{a_n^2} &\leq \\ E \frac{[f_n^*(X_n)]^2 \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})}{a_n^2}, \text{ a.s.} \end{aligned}$$

再由不等式: $0 \leq e^x - x - 1 \leq x^2 e^{|x|}, \forall x \in R$.

并注意到: $|Z_n| \leq 2, E(Z_n \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})) = 0, \text{ a.s.}$

故有

$$\begin{aligned} 0 \leq E(\exp(\lambda Z_n) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})) - 1 &= \\ E((\exp(\lambda Z_n) - \lambda Z_n - 1) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})) &\leq \\ \lambda^2 e^{2|\lambda|} E \frac{[g_n(f_n(X_n)) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})]}{g_n(a_n)} \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} E(\exp(\lambda Z_n) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})) \quad \text{在 } A \text{ 中 a.s. } P \text{ 收敛.} \quad (9)$$

由式(7) ~ (9) 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\lambda \sum_{m=1}^n Z_m\right)$ 在 A 中 a.s. 存在有限, 且当 $\lambda = 1, -1$ 时均成立, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n^*(X_n) - E(f_n^*(X_n) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})))}{a_n}, \text{ 在 } A \text{ 中 a.s. } P \text{ 收敛.} \quad (10)$$

又

$$\left| \frac{[E(f_n(X_n) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1})) - E(f_n^*(X_n) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdot, X_{n-1}))]}{a_n} \right| =$$

$$\begin{aligned}
& E\left(\frac{|f_n(X_n)|}{a_n} \chi_{(|f_n(X_n)| > a_n)} \mid \alpha \times \sigma(X_0, \dots, X_{n-1})\right) \leq \\
& E\left(\frac{g_n(f_n(X_n))}{g_n(a_n)} \chi_{(|f_n(X_n)| > a_n)} \mid \alpha \times \sigma(X_0, \dots, X_{n-1})\right) \leq \\
& E\left(\frac{g_n(f_n(X_n))}{g_n(a_n)} \mid \alpha \times \sigma(X_0, \dots, X_{n-1})\right). \quad (11)
\end{aligned}$$

由式(2)(5)(10)(11) 知:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n(X_n) - E(f_n(X_n) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \dots, X_{n-1})))}{a_n}, \quad \text{在 } A \text{ 中 a.s. } P \text{ 收敛.}$$

于是 (3) 得证.

由 Kronecker 引理 (见 [4] 第 111 页引理 2), 即得 (4). 定理得证.

参考文献:

- [1] NAWROTZKI K. Finite Markov chains in stationary random environments[J]. Ann Prob, 1982, 10(4): 1041 ~ 1046.
- [2] COGBURN R. On the central limit theorem for Markov chains in random environment[J]. Ann Prob, 1991, 19(2): 587 ~ 604.
- [3] COGBURN R. The ergodic theory of Markov chains in random environments[J]. Z W Verw Gebeite, 1984, 66: 109 ~ 128.
- [4] CHOW Y S, TEICHER H. Probability theory[M]. New York: Springer-Verlag Inc, 1978. 110 ~ 113.

A Class of Limit Theorems for Functionals of Markov Chains in Random Environments

BI Qiu-xiang^{*}, LI Wei

Abstract: The constructive definition of Markov chains in random environment (MCRE) is given. Suppose the moment of MCRE satisfies some conditions, we prove a class of limit theorems for functionals of Markov chains in random environments by truncated sequences and martingale theorem.

Keywords: Random environment; Markov chains; limit theorem

^{*} GF Securities Co. Ltd, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China