

文章编号: 0529-6579 (1999) 04-0011-04

随机环境中的广义生灭过程的常返性^{*}

毕秋香

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 建立了连续时间的随机环境中的广义生灭过程 (GBDPRE) 模型. 通过差分方程的计算, 先得到固定环境的广义生灭过程 (GBDP) 的常返性, 进而将环境随机化, 得到随机环境中的广义生灭过程常返性的一个充分条件.

关键词: 随机环境; 广义生灭过程; 常返性

中图分类号: O 211. 62 **文献标识码:** A

随机环境中的随机过程是近 30 年发展起来的随机过程的一个新分支. 对随机环境中的随机游动 (RWIRE) 的性质诸如常返性、极限性等已有许多结果. Ritter^[1] 构造出了随机环境中的生灭过程 (简记 BDPRE), 这是一个具有连续时间参数的随机环境中的随机过程. Ritter 得到了 BDPRE 的常返性准则. 随机环境中的生灭过程的自然拓广应为随机环境中的广义生灭过程 (简记 GBDPRE), 本文主要讨论 GBDPRE 的常返性, 得到了 GBDPRE 常返的一个充分条件.

1 本文结果

设 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\{a_{i0}, \dots, a_{i, i-1}, b_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ 为定义在某概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上一列独立的随机向量, 且 $b_i > 0 (i \geq 0)$, $a_{ij} \geq 0 (0 \leq j < i)$, $\sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} > 0$, 满足上述条件的随机向量序列称为随机环境, 记为 $e = \{a_{i0}, \dots, a_{i, i-1}, i \geq 1; b_i, i \geq 0\}$.

令 $c_0 = b_0$, $c_i = \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} + b_i (i \geq 1)$

对于给定一环境 e , 据生灭过程的一般理论, 容易确定一个以矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ a_{10} & -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & -c_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & -c_n & b_n & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

* 基金项目: 广东省自然科学基金 (980287) 资助项目

收稿日期: 1998-11-11

作者简介: 毕秋香, 女, 1965 年生, 博士研究生.

为密度矩阵的生灭过程, 称之为广义生灭过程, 记为 $X_t, t \geq 0$, 状态空间为 E , 它是一马氏过程, 其转移函数 $P_{ij}(t)$: 当 $t \rightarrow 0$ 时

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} b_i t + o(t) & j = i + 1 \\ a_j t + o(t) & 0 \leq j < i \\ 1 - c_i t + o(t) & j = i \\ o(t) & \text{其它} \end{cases} \quad i, j \in E$$

随机环境中的广义生灭过程(简记 GBDPRE), 仍用 $X_t, t \geq 0$ 表示, 是由下列方式决定的随机过程: 对任意 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 以及任意 $A_i \subset E, i = 0, 1, \dots, n$

$$P[\bigcap_{i=0}^n (X_{t_i} \in A_i)] = E[P(\bigcap_{i=0}^n (X_{t_i} \in A_i) | e)]$$

特别地, 若 $P(X_0 = 0) = 1$, 则称 X_t 为从 0 出发的 GBDPRE.

由随机环境中随机过程的一般理论^[2,3] 知, 由上述方式决定的 GBDPRE 是存在的, 它是一个具有独立随机环境的随机过程. 除非环境退化, 一般 GBDPRE 不具有马氏性. 如果对几乎所有的环境 e , 在此环境下, $X_t, t \geq 0$ 常返, 则称 GBDPRE 为常返的.

本文的主要结果是如下定理.

定理 设 e 为随机环境, $\{X_t, t \geq 0\}$ 为 GBDPRE, $a_i^{(k)} = \sum_{j=0}^k a_{ij} (i \geq 1, 0 \leq k < i)$, 若存在取非负整数值的单增数列 $0 < i_1 < i_2 < \dots$, 使 $\mu_j = E \ln (a_{i_j}^{(i_j-1)} / b_{i_j})$ 及 $\sigma_j^2 = D \ln (a_{i_j}^{(i_j-1)} / b_{i_j})$ 存在, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mu_j \triangleq \mu, \mu > 0, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{j^2} < \infty$, 则 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为常返的.

2 主要结果的证明

先讨论广义生灭过程的常返性准则, 假设环境是非随机的, 即 $a_{ij} (i > 0, 0 \leq j \leq i-1), b_i (i \geq 0)$ 均为常数, 此时 $X_t, t \geq 0$ 为状态空间 E 上的以 Q 为密度矩阵的广义生灭过程.

$$\text{设 } i \in E, \text{ 定义 } \eta_i(\omega) = \begin{cases} \inf\{t > 0, X_t(\omega) = i\} & \text{if } \{t > 0, X_t(\omega) = i\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{if } \{t > 0, X_t(\omega) = i\} = \emptyset \end{cases}$$

当 $x_0 = k$ 时, p_k 表示相应的条件概率, $k \in E$,

$$\text{记 } f_k(m, n) = p_k(\eta_m(\omega) < \eta_n(\omega)) \quad (m \leq k \leq n)$$

$$g_k(m) = p_k(\eta_m(\omega) < \tau(\omega)) \quad (\tau(\omega) \text{ 为过程的第 1 个飞跃点}^{[4]})$$

易知当 $k \leq m < n$ 时, $f_k(m, n) = 1, g_k(m) = 1$.

$$\text{又记 } a_i^{(k)} = \sum_{j=0}^k a_{ij} (i \geq 1, 0 \leq k < i)$$

$$\text{对任意的 } m \in E, \text{ 定义 } \begin{cases} F_m^{(m)} = 1 \\ F_k^{(m)} = \frac{1}{b_{k_i}} \sum_{i=1}^{k-m} a_k^{(k-i)} F_{k-i}^{(m)} \quad (k > m) \end{cases}$$

$$\text{引理 1 } f_k(m, n) = \sum_{j=k}^{n-1} F_j^{(m)} \setminus \sum_{j=m}^{n-1} F_j^{(m)} \quad (m < k < n) \quad (1)$$

$$g_k(m) = \begin{cases} \sum_{j=k}^{\infty} F_j^{(m)} \setminus \sum_{j=m}^{\infty} F_j^{(m)} & k > m \\ 1 & k < m \\ 1 - \frac{b_k}{c_k} \setminus \sum_{j=k}^{\infty} F_j^{(k)} & k = m \end{cases} \quad (2)$$

证明 当 m, n 固定时, 令 $f_k = f_k(m, n)$, 对 $X_t, t \geq 0$ 利用强马氏性, 有

$$f_k = p(\eta_m(\omega) < \eta_n(\omega) \mid X_0 = k) = (a_k^{(m)} + a_{k, m+1}f_{m+1} + a_{k, m+2}f_{m+2} + \cdots + a_{k, k-1}f_{k-1} + b_k f_{k+1}) / c_k$$

$$b_k(f_k - f_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k-m} a_k^{(k-i)}(f_{k-i} - f_{k-i+1}) \quad (m < k < n)$$

运算得 $f_{k+1} - f_k = F_k^{(m)}(f_{m+1} - f_m)$, 于是

$$f_n - f_{m+1} = \sum_{k=m+1}^{n-1} F_k^{(m)}(f_{m+1} - f_m) = \sum_{k=m+1}^{n-1} F_k^{(m)}(f_{m+1} - 1)$$

又 $f_n = 0$, 故得 $f_{m+1} = \sum_{k=m+1}^{n-1} F_k^{(m)} \setminus \sum_{k=m}^{n-1} F_k^{(m)}$, 因此, $f_{k+1} - f_k = -F_k^{(m)} \setminus \sum_{k=m}^{n-1} F_k^{(m)}$

故 $f_k = \sum_{i=k}^{n-1} (f_i - f_{i+1}) = \sum_{i=k}^{n-1} [F_i^{(m)} \setminus \sum_{k=m}^{n-1} F_k^{(m)}] = \sum_{i=k}^{n-1} F_i^{(m)} \setminus \sum_{k=m}^{n-1} F_k^{(m)}$. 即(1)式.

往证(2)式. 显然, 当 $k < m$ 时, $g_k(m) = 1$.

当 $k > m$ 时, 令 $n \rightarrow \infty, \{x_0(\omega) = k, \eta_m(\omega) < \eta_n(\omega)\} \uparrow \{x_0(\omega) = k, \eta_m(\omega) < \tau(\omega)\}$ a. e. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(m, n) = g_k(m)$, 即得(2)式的第1式.

当 $k = m$ 时, 由强马氏性知: $g_k(k) = \frac{b_k}{c_k} g_{k+1}(k) + \frac{1}{c_k} \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} g_i(k)$, 再由第1个结论知

$$g_k(k) = \frac{b_k \sum_{j=k+1}^{\infty} F_j^{(k)}}{c_k \sum_{j=k}^{\infty} F_j^{(k)}} + \frac{a_k^{(k-1)}}{c_k} = 1 - \frac{b_k}{c_k \sum_{j=k}^{\infty} F_j^{(k)}}$$

引理 2 广义生灭过程 $X_t, t \geq 0$ 常返的充要条件为 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} = \infty$.

证明 由于 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态是互通的, 因此只须讨论状态 $\{0\}$ 的常返性, 由引理 1,

$$g_0(0) = p_0(\eta_0(\omega) < \infty) = 1 - 1 \setminus \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}$$

因此 $g_0(0) = 1$ 的充要条件为 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} = \infty$.

定理的证明 要证 GBDPRE 常返, 由引理 2 知, 只须证 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} = \infty$. a. e. P

而由归纳法可证, 不仅 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{(k-1)} a_{k-1}^{(k-2)} \cdots a_1^{(0)}}{b_k b_{k-1} \cdots b_1}$, 而且对任意单增的整数序列

$0 < j_1 < j_2 < \cdots, \frac{a_{j_k}^{(j_{k-1})} \cdots a_{j_2}^{(j_1)} a_{j_1}^{(0)}}{b_{j_k} \cdots b_{j_2} b_{j_1}}$ 均包含在 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}$ 之中, 因此, 当定理的假设条件满足时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i_k}^{(i_{k-1})} \cdots a_{i_2}^{(i_1)} a_{i_1}^{(0)}}{b_{i_k} \cdots b_{i_2} b_{i_1}}, \text{ 故只须证 } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i_k}^{(i_{k-1})} \cdots a_{i_2}^{(i_1)} a_{i_1}^{(0)}}{b_{i_k} \cdots b_{i_2} b_{i_1}} = \infty. \text{ a. e. P}$$

$$\text{又 } \frac{a_{i_k}^{(i_{k-1})} \cdots a_{i_2}^{(i_1)} a_{i_1}^{(0)}}{b_{i_k} \cdots b_{i_2} b_{i_1}} = \exp \left(\sum_{j=1}^k \ln \frac{a_{i_j}^{(i_{j-1})}}{b_{i_j}} \right) \triangleq \exp (S_k).$$

当 $\mu > 0$ 时, 由已知条件, $\ln [a_{i_j}^{(i_{j-1})}/b_{i_j}]$, $j = 1, 2, \dots$, 服从强大数定律, 因此当 k 充分大时, 对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\ln \frac{a_{i_j}^{(i_{j-1})}}{b_{i_j}} - E \ln \frac{a_{i_j}^{(i_{j-1})}}{b_{i_j}} \right) > -\epsilon, \text{ 即 } \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mu_j > \mu - \epsilon.$$

故对充分大的 k , $S_k = k \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\ln \frac{a_{i_j}^{(i_{j-1})}}{b_{i_j}} - E \ln \frac{a_{i_j}^{(i_{j-1})}}{b_{i_j}} \right) + \sum_{j=1}^k \mu_j > k(\mu - 2\epsilon)$

取 $0 < \epsilon < \mu/2$, 则有 $S_k > 0$ a. e. P, 因此, $\exp (S_k) > 1$ a. e. P.

故 $\{X_t, t \geq 0\}$ 常返.

注: 当 $i_k = k$ 时, $1 < 2 < \cdots < k-1 < k < \cdots$, 令 $a_{kj} = 0, 0 \leq j < k-1, a_{kk-1} \triangleq a_k$, 则 $a_{i_k}^{(i_{k-1})} = a_k$, GBDPRE 退化为标准 BDPRE, $a_{i_j}^{(i_{j-1})}/b_{i_j} = a_j/b_j$, 若设 $\{a_j, b_j\}, j \geq 1$ 为独立同分

布的随机向量, $\mu_j = E \ln [a_{i_j}^{(i_{j-1})}/b_{i_j}] = E \ln (a_j/b_j)$ 与 j 无关, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_j = \mu =$

$E \ln (a_1/b_1)$, 当 $E \ln (a_1/b_1) > 0$ 时, BDPRE 一定为常返的^[5]. 因此本定理一定意义上是文 [5] 中的结果的推广.

参考文献:

- [1] RITTER G. A continuous-time analogue of random walk in a random environment [J]. J Appl Prob, 1980, 17: 259~264.
- [2] COUGBURN R, TORREZ W C. Birth and death process with random environment in continuous time [J]. J Appl Prob, 1981, 18: 19~30.
- [3] SOLOMON F. Random walks in random environment [J]. Ann Prob, 1975, 3: 1~31.
- [4] 王梓坤. 生灭过程与马尔科夫链 [M]. 北京: 科学出版社, 1980. 71.
- [5] 汪荣明. 一类随机环境中单边生灭链的常返性 [J]. 数理统计与应用概率, 1995, 10 (3): 8~14.

Recurrence for the Generalized Birth-Death Processes in a Random Environment

Bi Qiuxiang^{*}

Abstract: The continuous time model for the generalized birth-death process in a random environment (GBDPRE) is established. The recurrence of generalized birth-death process (GBDP) is obtained by means of difference equation. Further more, a sufficient condition of recurrence for GBDPRE is given.

Keywords: random environment; generalized birth-death process; recurrence

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China