

文章编号: 0529-6579 (1999) 05-0011-05

摄动-增量法中有限 Fourier 级数的运算^{*}

朱洁华

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘要: 采用符号计算的思想建立了有限 Fourier 级数的运算系统, 将该系统应用于涉及到谐波平衡法的问题中可避免大量手工运算并便于分析. 将其应用于极限环的摄动-增量法中取得了很好的效果.

关键词: 极限环; 摄动-增量法; 符号计算

中图分类号: O 322 **文献标识码:** A

对自治非线性系统

$$\ddot{x} + g(x) = \lambda f(x, \dot{x}) \quad (f, g \text{ 为非线性}) \quad (1)$$

文 [1] 给出了确定其极限环^[1]的摄动-增量法, 该方法对 $\lambda \gg 1$ 都很有效. 在具体实现该方法时可采用人工推算和符号计算 2 种方法. 其中人工推算具有工作量大, 计算繁琐等弊端.

本文将采用符号计算的思想^[3], 建立有限 Fourier 级数的运算系统 FFSC (computation of finite Fourier sequence), 利用系统 FFCS 可使摄动-增量法的实现非常轻松而且条理清晰, 更由于其符号计算的属性而使得摄动-增量法在理论上具有更广泛的意义, 以便推广它在非线性系统研究中的应用.

1 极限环的摄动-增量法

假设方程(1)至少有 1 个极限环且相平面的原点在极限环内, 确定其极限环的摄动-增量法包括以下几步:

① 作时间变换

$$d\varphi/dt = \Phi(\varphi), \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad (2)$$

在新时间 φ 域内把极限环表示为

$$x(\varphi) = a \cos \varphi + b, \quad \dot{x} = -a\Phi(\varphi) \sin \varphi \quad (3)$$

其中, $a > 0$ 是极限环的振幅, b 是偏心;

② 在 φ 域内积分方程(1), 有:

$$\frac{1}{2}(\Phi \sin \varphi)^2 + v(a, b, \varphi) - \lambda \int_0^\varphi f(a, b, \Phi, \varphi) d\varphi = 0 \quad (4)$$

* 收稿日期: 1999-01-03

作者简介: 朱洁华, 女, 1968 年生, 讲师.

取 $\varphi = \pi, 2\pi$ 分别得到:

$$v(a, b, \pi) - \lambda \int_0^\pi f(a, b, \Phi, \varphi) d\varphi = 0 \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} f(a, b, \Phi, \varphi) d\varphi = 0 \quad (6)$$

其中, $v(a, b, \varphi) = \frac{1}{2}[\tilde{v}(a \cos \varphi + b) - \tilde{v}(a + b)]$, $\tilde{v}(x) = \int_0^x g(u) du$

$$f(a, b, \Phi, \varphi) = \tilde{f}(a \cos \varphi + b, -a\Phi(\varphi)\sin \varphi)\Phi(\varphi)\sin^2 \varphi$$

③ 用摄动法对 $\lambda = \lambda_0 \approx 0$, 从方程(4) ~ (6) 得到极限环的零阶近似解 (a_0, b_0, Φ_0) ;

④ 用参数增量法给 λ_0 小增量 $\Delta\lambda$, $0 < \Delta\lambda \ll 1$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, 设对应的解为 (a, b, Φ) :

$$a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad \Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi \quad (7)$$

其中, Φ 和 $\Delta\Phi$ 是周期为 2π 的周期函数, 可写为

$$\Phi(\varphi) = \sum_{j=0}^M (P_j \cos j\varphi + Q_j \sin j\varphi), \quad Q_0 = 0 \quad (8)$$

$$\Delta\Phi = \sum_{j=0}^M (\Delta P_j \cos j\varphi + \Delta Q_j \sin j\varphi), \quad \Delta Q_0 = 0 \quad (9)$$

将(8), (9)式代入方程(4) ~ (6), 略去高阶项得到3个线性增量方程并把其中的周期函数都展为 Fourier 级数;

⑤ 应用谐波平衡法得到关于 $\Delta a, \Delta b, \Delta P_j$ 和 ΔQ_j 的线性代数方程组

$$A(\Delta P_0 \Delta P_1 \cdots \Delta P_M \Delta Q_1 \Delta Q_2 \cdots \Delta Q_M \Delta a \Delta b)' = R \quad (10)$$

解方程(10)得到 $\Delta a, \Delta b, \Delta\Phi$ 后由(7)得到 a, b, Φ , 再作为新的 a_0, b_0, Φ_0 去求新的 $\Delta a, \Delta b, \Delta\Phi$, 这样迭代下去直到 $R_n \rightarrow 0$ ($n = 1, 2, \dots, 2M+3$) 为止, 就得到 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ 时的解. 若再给参数以增量 $\Delta\lambda$, 重复上述迭代过程, 若干次增量后就可以得到所需要的 λ 值对应的系统的极限环.

在上法中使用谐波平衡法得到线性方程组(10) 是关键而有效的一步, 但必须要算出呈 Fourier 级数形式的 $\Delta P_j, \Delta Q_j, \Delta a, \Delta b$ 各项的系数才能确定 A , 因此若人工推导工作量很大, 并且对新方程又要重新推导, 费时费力, 不利于摄动 - 迭代法的完善与推广.

2 有限 Fourier 级数的运算系统 FFSC

有限 Fourier 级数的运算系统 FFSC 是用符号计算的思想建立的. 约定用系数矢量

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{M+1} \ a_{M+2} \ \cdots \ a_{2M+1}]^T \quad (11)$$

表示有限 Fourier 级数

$$a(\varphi) = \sum_{i=1}^{M+1} a_i \cos(i-1)\varphi + \sum_{i=2}^{M+1} a_{M+i} \sin(i-1)\varphi \quad (12)$$

那么形如(12)的有限 Fourier 级数的运算就可通过形如(11)的系数矢量的运算来实现^[4].

根据目前的需要, 有限 Fourier 级数的运算系统至少可具有以下功能:

1) 有限 Fourier 级数与三角函数的乘积. 如有限 Fourier 级数 $a(\varphi)$ 与 $\sin j\varphi$ 或 $\cos j\varphi$ 相乘, $a(\varphi)$ 与 $\sin^k \varphi$ 或 $\cos^k \varphi$ 相乘, 其中 j, k 为任意正整数.

2) 有限 Fourier 级数的导数与积分. 如求有限 Fourier 级数 $a(\varphi)$ 作为 φ 的函数的导数(得到另一有限 Fourier 级数), $a(\varphi)$ 作为 φ 的函数在 $[\varphi_1, \varphi_2]$ 上的定积分(若 φ_1, φ_2 确定, 则得

到 1 个积分值; 若 φ_2 为变上限 φ , 则得到 1 个新的 Fourier 级数).

3) 有限 Fourier 级数的四则运算. 即求有限 Fourier 级数 $a(\varphi)$ 与 $b(\varphi)$ 的和级数、差级数、积级数、商级数, 其中 $a(\varphi)$ 与 $b(\varphi)$ 的 M 值可以不相等.

4) 当 φ 值给定时有限 Fourier 级数的取值.

除了这些运算功能外, 还有个最基本的功能: 将有限 Fourier 级数 $a(\varphi)$ 的通常形式 (12) 转化为这套运算系统所需要的形如 (11) 的系数矢量表示.

将这套运算系统与快速 Fourier 变换结合起来可成为有限 Fourier 级数的有效运算工具, 在谐波平衡法中效果很好. 现将其应用于摄动-增量法中, 把 Φ_0 表示为 (11) 的形式后, 方程 (10) 中的 ΔP_j 、 ΔQ_j 、 Δa 、 Δb 各项的系数都可以利用系统 FFSC 中的函数自动推导, 而得到的结果仍是 Fourier 级数的向量形式, $(2M+3) \times (2M+3)$ 的矩阵 A 则被分成 12 块, 各块只须一、二个语句即可, 程序极简明, 清晰地反映了摄动-增量法的思想, 而且便于分析 A 矩阵. 对于不同类型的系统, 不必重新推导而可以很快地使用摄动-增量法确定其极限环.

3 实 例

例 $\ddot{x} + x - x^3 = \lambda(0.1 + x^4 - x^2)x$ (13)

当 $\lambda \approx 0$ 时, 由方程 (4) ~ (6) 求得

$$a_0 = 0.39, b_0 = 0, \Phi_0 = [1 - \frac{1}{2} a_0^2 (1 + \cos^2 \varphi)]^{\frac{1}{2}}$$

先用符号计算语言 (如 MathematicaTM) 计算增量方程中的 v 、 $\partial v / \partial a$ 、 $\partial v / \partial b$ 、 f 、 $\partial f / \partial a$ 、 $\partial f / \partial b$ 、 $\partial f / \partial \Phi$ 后即可利用有限 Fourier 级数的运算系统 FFSC 得到方程 (10).

对 $\lambda_0 = 0$, $\Delta \lambda = 0.5$, 取 $M = 40$, 在 $\Delta \lambda$ 的 1 次增量后, 对 $\lambda = 0.5$ 的结果列于表 1 左栏, 极限环的相图如图 1 所示, 与四阶 Runge-Kutta 方法求得的数值解相比, 结果很一致. 经 $\Delta \lambda$ 的 20 次增量后, 对 $\lambda = 10$ 的结果列于表 1 右栏, 极限环的相图见图 2, 与四阶 Runge-Kutta 方法求得的数值解结果吻合.

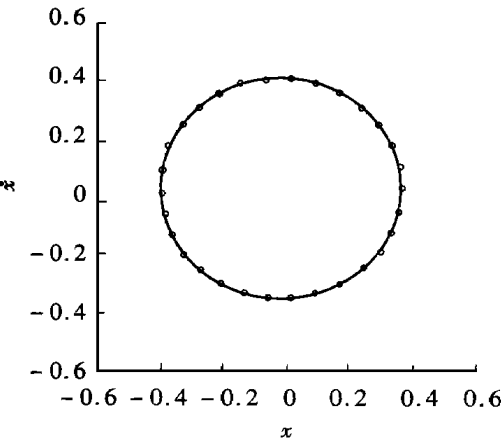


图 1 方程 (13) $\lambda = 0.5$ 时极限环相图

Fig. 1 Limit cycle phase portrait of equation (13) for $\lambda = 0.5$

— 数值积分法; ° 摄动-增量法

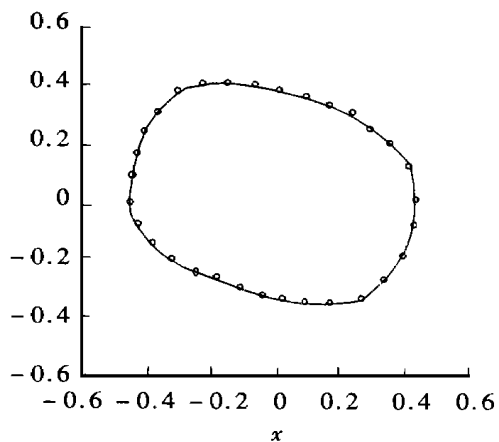


图 2 方程 (13) $\lambda = 10$ 时极限环相图

Fig. 2 Limit cycle phase portrait of equation (13) for $\lambda = 10$

— 数值积分法; ° 摄动-增量法

表 1 方程(13) $\lambda=0.5$ 和 $\lambda=10$ 时极限环的振幅和偏心及 $\Phi(\varphi)$ 的 Fourier 系数
Tab 1 Amplitudes and biases of the limit cycles and Fourier coefficients of $\Phi(\varphi)$ for $\lambda=0.5$ and $\lambda=10$

$\lambda=0.5, a=0.38686, b=0$			$\lambda=10, a=0.44527, b=0$		
j	P	Q	j	P	Q
0	9.41957e-01	0.00000e+00	0	8.63961e-01	0.00000e+00
1	0.00000e+00	0.00000e+00	1	0.00000e+00	0.00000e+00
2	-1.96467e-02	9.89101e-03	2	5.39334e-02	1.83581e-01
3	0.00000e+00	0.00000e+00	3	0.00000e+00	0.00000e+00
4	-1.70467e-04	1.53671e-04	4	-1.79603e-02	2.71835e-02
5	0.00000e+00	0.00000e+00	5	0.00000e+00	0.00000e+00
6	-1.65292e-06	4.86864e-07	6	-4.52861e-02	-9.50624e-04
7	0.00000e+00	0.00000e+00	7	0.00000e+00	0.00000e+00
8	-9.25543e-09	1.47991e-08	8	-1.09067e-04	-6.78479e-04
9	0.00000e+00	0.00000e+00	9	0.00000e+00	0.00000e+00
10	-1.21264e-10	3.89577e-10	10	8.86981e-05	-5.43156e-05
11	0.00000e+00	0.00000e+00	11	0.00000e+00	0.00000e+00
12	-9.67579e-13	7.35586e-12	12	1.27766e-05	9.03061e-06
13	0.00000e+00	0.00000e+00	13	0.00000e+00	0.00000e+00
14	2.39327e-14	1.33994e-13	14	-4.91578e-07	2.29044e-06
15	0.00000e+00	0.00000e+00	15	0.00000e+00	0.00000e+00
16	3.10181e-15	2.40973e-15	16	-3.45944e-07	6.64881e-08
17	0.00000e+00	0.00000e+00	17	0.00000e+00	0.00000e+00
18	1.78127e-15	4.00132e-17	18	-2.96655e-08	-4.40182e-08
19	0.00000e+00	0.00000e+00	19	0.00000e+00	0.00000e+00
20	1.59941e-15	4.27670e-19	20	4.33948e-09	-6.70632e-09
21	0.00000e+00	0.00000e+00	21	0.00000e+00	0.00000e+00
22	1.45296e-15	-1.96406e-19	22	1.18390e-09	2.05505e-10
23	0.00000e+00	0.00000e+00	23	0.00000e+00	0.00000e+00
24	1.30744e-15	-2.58453e-19	24	4.13205e-11	1.76054e-10
25	0.00000e+00	0.00000e+00	25	0.00000e+00	0.00000e+00
26	1.16194e-15	-3.14755e-19	26	-2.19355e-11	1.61054e-11
27	0.00000e+00	0.00000e+00	27	0.00000e+00	0.00000e+00
28	1.01644e-15	-3.71073e-19	28	-3.52253e-12	-2.08657e-12
29	0.00000e+00	0.00000e+00	29	0.00000e+00	0.00000e+00
30	8.70940e-16	-4.27394e-19	30	8.13909e-14	-6.10778e-13
31	0.00000e+00	0.00000e+00	31	0.00000e+00	0.00000e+00
32	7.25440e-16	-4.83715e-19	32	8.95427e-14	-2.48501e-14
33	0.00000e+00	0.00000e+00	33	0.00000e+00	0.00000e+00
34	5.79940e-16	-5.40036e-19	34	8.85712e-15	1.08513e-14
35	0.00000e+00	0.00000e+00	35	0.00000e+00	0.00000e+00
36	4.34440e-16	-5.96338e-19	36	-8.93699e-16	1.80637e-15
37	0.00000e+00	0.00000e+00	37	0.00000e+00	0.00000e+00
38	2.88941e-16	-6.51884e-19	38	-2.65435e-16	-5.79181e-17
39	0.00000e+00	0.00000e+00	39	0.00000e+00	0.00000e+00
40	1.43471e-16	-6.77687e-19	40	-3.14727e-17	-6.01228e-17

关于有限 Fourier 级数运算系统的精确度问题, 是可以完善的. 在两级数相乘的函数程序中现采取截断方式, 但是可以通过增大 M 、估计乘法的次数等方法做到完全精确. 就目前的应用而言, 已取得很好的效果.

由于 Fourier 级数运算及谐波平衡法在科学与工程计算中应用广泛, 这套有限 Fourier 级数运算系统 FFCS 及其思想还适用于其它问题.

致谢 感谢朱思铭教授的有益建议和讨论. 感谢香港城市大学 Dr. Henry S Y CHAN 和 Dr. K W CHUNG 给予帮助并提供工作条件.

参考文献:

- [1] CHAN H S Y, CHUNG K W, XU Z. A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators [J]. Int J Non-linear Mechanics, 1996, 31 (1): 59~72.
- [2] 叶彦谦. 极限环论 (第 2 版) [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984. 89~175.
- [3] 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器证明 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1996. 6~12.
- [4] GANDER W. Solving problems in scientific computing using Maple and MATLAB [M]. Berlin: Springer, 1995. 56~122.

Computation of Finite Fourier Sequences in the Perturbation-Incremental Method

ZHU Jie-hua^{*}

Abstract: A computational system for finite Fourier sequence is established with the thought of symbolic computation. Large quantities of manual calculations can be avoided when it is applied to the problems involving harmonic-balance method. It is used to compute limit cycles by perturbation-incremental method and a fine result is shown.

Keywords: limit cycle; perturbation-incremental method; symbolic computation