

文章编号: 0529-6579 (1999) 05-0012-05

关于自然边界小波元刚度矩阵的条件数^{*}

陈文胜, 张永虎

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 应用 E. Quak 小波方法和自然边界元方法于单位圆内 Laplace 方程的 Neumann 边值问题得到了自然边界元刚度矩阵的条件数为 $O(N)$, 其中 N 为对边界作均匀剖分的节点数.

关键词: Laplace 方程; 小波; 刚度矩阵; 条件数

中图分类号: O 241.8 **文献标识码:** A

在用有限元方法或边界元方法求微分方程边值问题数值解时, 希望得到的刚度矩阵具有较小的条件数, 因为大的条件数有明显的缺点, 主要表现在用迭代法求解线性代数方程组时, 收敛速度慢, 迭代过程也不稳定. 对于 Laplace 方程的 Neumann 边值问题, 用有限元方法求解时, 其刚度矩阵的条件数为 $O(N^2)$, 本文将证明文[1] 中用自然边界元小波方法得到的刚度矩阵的条件数仅为 $O(N)$, 从而大大改善了刚度矩阵的条件数, 显示了自然边界元小波方法的优越性.

1 Neumann 边值问题

设 Ω 为单位圆内区域, 其边界为 Γ . 考虑如下调和方程的 Neumann 边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & p \in \Omega \\ \partial u / \partial n = u_n & p \in \Gamma \end{cases}$$

其中, $\partial / \partial n$ 为边界 Γ 上的外法向导数, u_n 满足相容性条件 $\int_{\Gamma} u_n ds = 0$.

从 Laplace 方程解的 Poisson 公式 $u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)u_0(\theta')}{1+r^2-2r \cos(\theta-\theta')} d\theta'$ 出发, 可归化得到如下自然边界积分方程:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0(\theta')}{\sin^2[(\theta-\theta')/2]} d\theta = u_n(\theta)$$

若定义双线性型如下:

$$D(\sigma, \mu) = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi \sin^2[(\theta-\theta')/2]} \sigma(\theta') \mu(\theta) d\theta' d\theta$$

* 基金项目: 广东省自然科学基金 (960018) 资助项目; 中山大学高等学术研究中心基金资助项目

收稿日期: 1998-11-23 作者简介: 陈文胜, 男, 1967 年生, 博士, 深圳大学理学院数学系.

$$F(\sigma) = \int_0^{2\pi} u_n(\theta) \sigma(\theta) d\theta$$

则自然边界积分方程等价于边界上的变分问题: 求 $u_0(\theta) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 使得

$$D(\sigma, u_0) = F(\sigma), \quad \forall \sigma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (1)$$

引理 1^[2] $D(\sigma, \mu)$ 为商空间 $H^{1/2}(\Gamma)/P_0$ 上对称正定、 V -椭圆、连续双线性型。

由引理 1 和 Lax-Milgram 定理易知, 变分问题(1) 在商空间 $H(\Gamma)/P_0$ 中存在唯一解。

2 Galerkin-Wavelet 方法

本节应用 Quak 三角小波^[3] 与 Galerkin 方法求解变分问题(1). 试验函数空间取为尺度空间 $V_j = \text{Span}\{\varphi_{j,n}^0(\theta), \varphi_{j,n}^1(\theta) \mid n = 0, 1, \dots, 2^{j+1}-1\}$, 对于尺度函数有如下引理 2.

引理 2^[2] 在水平 $j \in N_0$ 上, 尺度函数之间的内积如下:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \langle \varphi_{j,k}^0, \varphi_{j,s}^0 \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+3}} \right), & k = s \\ 2^{\frac{1}{3j+3}} \sin^{-2}(\theta_{j+1, k-s}), & k \neq s, \end{cases} \\ \text{(b)} \quad \langle \varphi_{j,k}^0, \varphi_{j,s}^1 \rangle &= \begin{cases} 0, & k = s, \\ 2^{\frac{1}{3j+3}} \cot(\theta_{j+1, k-s}), & k \neq s, \end{cases} \\ \text{(c)} \quad \langle \varphi_{j,k}^1, \varphi_{j,s}^1 \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{2^{3j+2}} - \frac{3}{4j+5}, & k = s, \\ -\frac{3}{2^{4j+5}}, & k \neq s. \end{cases} \end{aligned}$$

由于 $V_j(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 因此可考虑问题(1) 的近似变分问题: 求 $u_0^j \in V_j(\Gamma)$, 使得

$$D(u_0^j, \sigma) = \int_0^{2\pi} u_n \circ \sigma d\theta, \quad \forall \sigma \in V_j(\Gamma) \quad (2)$$

设 $u_0^j(\theta)$ 是 $u_0(\theta)$ 在空间 V_j 中的 Galerkin 投影, 即

$$u_0^j(\theta) = \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} [\alpha_k^j \varphi_{jk}^0(\theta) + \beta_k^j \varphi_{jk}^1(\theta)] \quad (3)$$

将(3) 式代入近似变分问题(2) 便得如下线性方程组:

$$D \begin{pmatrix} \alpha^j \\ \beta^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中, $D = \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix}_{2N \times 2N}$, $D_{pq} = (d_{mn}^{pq}) = (D(\varphi_{jm}^p(\theta^l), \varphi_{jn}^q(\theta)))_{N \times N}$

$$N = 2^{j+1}, p, q = 0, 1, \quad m, n = 0, 1, \dots, 2^{j+1}-1$$

$$\alpha^j = (\alpha_0^j, \alpha_1^j, \dots, \alpha_{2^{j+1}-1}^j)^T$$

$$\beta^j = (\beta_0^j, \beta_1^j, \dots, \beta_{2^{j+1}-1}^j)^T$$

$$a^j = (a_0^j, a_1^j, \dots, a_{2^{j+1}-1}^j)^T \quad b^j = (b_0^j, b_1^j, \dots, b_{2^{j+1}-1}^j)^T$$

$$a_k^j = \int_0^{2\pi} u_n(\theta) \varphi_{jk}^0(\theta) d\theta \quad b_k^j = \int_0^{2\pi} u_n(\theta) \varphi_{jk}^1(\theta) d\theta, 0 \leq k \leq 2^{j+1}-1$$

定理 1^[1] 自然边界元刚度矩阵 $D = \text{diag}\{D_{00}, D_{11}\}$, 其中

$$D_{00} = \left[\left(d_0^{00}, d_1^{00}, \dots, d_{2^{j+1}-1}^{00} \right) \right], D_{11} = \left[\left(d_0^{11}, d_1^{11}, \dots, d_{2^{j+1}-1}^{11} \right) \right],$$

$$\text{并且 } d_r^{00} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2^{j+2}}} \right) & r = 0, \\ -\frac{\pi}{2^{2^{j+2}}} \sin^{-2} \theta_{j+1, r} & 1 \leq r \leq 2^{j+1} - 1 \end{cases}, d_r^{11} = \begin{cases} \frac{\pi(2^{j+2} - 1)}{2^{3^{j+3}}} & r = 0 \\ -\frac{\pi}{2^{3^{j+3}}} & 1 \leq r \leq 2^{j+1} - 1 \end{cases}$$

符号 $((a_1, a_2, \dots, a_n))$ 表示由元素 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 生成的 $n \times n$ 阶循环矩阵.

由定理 1 知, D_{00} 是 1 个 $2^{j+1} \times 2^{j+1}$ 阶秩为 $2^{j+1} - 1$ 的半正定对称循环矩阵, D_{11} 是 1 个 $2^{j+1} \times 2^{j+1}$ 阶正定对称循环阵.

3 刚度矩阵的条件数

矩阵 A 为对称正定或半正定矩阵时, 其条件数 $\text{cond}(A)$ 定义为: $\text{cond}(A) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$, 其中 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别是矩阵 A 的最大特征值与最小非零特征值. 从上节知, 自然边界元刚度矩阵 D 可分离为 2 个较小的矩阵 D_{00} 和 D_{11} , 因此只需讨论 D_{00} 和 D_{11} 的条件数即可. 对此, 有如下定理 2.

定理 2 若记边界均匀剖分的节点数 $N = 2^{j+1}$, 则

$$\text{cond}(D_{00}) = \text{cond}(D_{11}) = O(N)$$

证明 我们只证 $\text{cond}(D_{00}) = O(N)$, 另 1 个可类似证明. 为此, 设 $\lambda \neq 0$ 是系数矩阵 D_{00} 的特征值, $X_\lambda = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$ 为相应于 λ 的单位特征向量, 即满足:

$$X_\lambda^T X_\lambda = 1, D_{00} X_\lambda = \lambda X_\lambda.$$

令 N 维单位向量 $e = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, \dots, 1)^T$, 则由第 2 节知, $D_{00}e = 0$, 从而

$$\lambda e^T X_\lambda = e^T D_{00} X_\lambda = (X_\lambda^T D_{00} e)^T = 0$$

由 $\lambda \neq 0$, 可得 $\sum_{k=0}^{N-1} x_k = 0$. 我们记 $x_\lambda(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \varphi_{j,k}^0(\theta)$, 则

$$\int_0^{2\pi} x_\lambda(\theta) d\theta = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^{2\pi} \varphi_{j,k}^0(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{N-1} x_k = 0 \quad (5)$$

并且, $\lambda = X_\lambda^T D_{00} X_\lambda = \sum_{p,q=0}^{N-1} x_p D(\varphi_{j,p}^0(\theta), \varphi_{j,q}^0(\theta)) x_q = D(x_\lambda(\theta), x_\lambda(\theta))$

再由引理 1 知, 存在与 λ 和 N 均无关的正常数 α 和 β , 使得

$$\alpha \|x_\lambda(\theta)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma/P_0)}^2 \leq \lambda \leq \beta \|x_\lambda(\theta)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma/P_0)}^2$$

又 $\varphi_{j,k}^0(\theta) \in T_N$, 其中, T_N 为次数不超过 N 的三角多项式组成的线性空间, 所以, $x_\lambda(\theta) \in T_N$, 从而由 Bernstein 不等式得

$$\begin{aligned} \|x_\lambda(\theta)\|_{H^1(\Gamma)} &= \left(\|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|x'_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\left(\|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + N^2 \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} N \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

结合插值不等式^[4], 我们有:

$$\|x_\lambda(\theta)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \leq C \|x_\lambda(\theta)\|_{H^1(\Gamma)} \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \sqrt{2} C N \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

于是 $\alpha \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma/P_0)}^2 \leq \lambda \leq \gamma N \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma/P_0)}^2$

其中, 正常数 α 和 γ 均与 λ 和 N 无关. 由 (5) 式得:

$$\|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma/P_0)}^2 = \inf_{M \in \mathbf{R}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [x_\lambda(\theta) - M]^2 d\theta =$$

$$\inf_{M \in \mathbf{R}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [x_\lambda^2(\theta) + M^2] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_\lambda^2(\theta) d\theta = \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

从而 $\alpha \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \lambda \leq \gamma N \|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2$ (6)

下面对 $\|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}$ 的上下界进行估计. 由引理 2 有:

$$\|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \left\| \sum_{l=0}^{N-1} x_l \varphi_{j,l}^0(\theta) \right\|^2 =$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} x_l^2 \|\varphi_{j,l}^0(\theta)\|^2 + 2 \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1-s} x_l x_{l-s} \langle \varphi_{j,l}^0(\theta), \varphi_{j,l+s}^0(\theta) \rangle =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{3j+3}} \right) + \frac{2}{2^{3j+3}} \sum_{s=1}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1-s} x_l x_{l-s} \right) \sin^{-2} \theta_{j+1,s}.$$

所以 $\|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{3j+3}} \right) + \frac{2}{2^{3j+3}} \sum_{s=1}^{N-1} \sin^{-2} \theta_{j+1,s} =$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{3j+3}} \right) + \frac{2}{2^{3j+3}} \cdot \frac{1}{3} (2^{2j+2} - 1) =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{2^j} - \frac{1}{2^{3j+3}} \right) = \frac{1}{3N} \left(4 - \frac{1}{N^2} \right) \leq \frac{4}{3N}$$

又 $\|x_\lambda(\theta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{3j+3}} \right) + \frac{2}{2^{3j+3}} \sum_{s=1}^{2^j-1} \left(\sum_{l=0}^{2^{j+1}-1-s} x_l x_{l-s} \right) \sin^{-2} \theta_{j+1,s} +$

$$\frac{2}{2^{3j+3}} \sum_{s=2^j}^{2^{j+1}-1} \left(\sum_{l=0}^{2^{j+1}-1-s} x_l x_{l-s} \right) \sin^{-2} \theta_{j+1,s} \geq$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{3j+3}} \right) - \frac{2}{2^{3j+3}} \sum_{s=1}^{2^j-1} \sin^{-2} \theta_{j+1,s} - \frac{2}{2^{3j+3}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{s=2^j}^{2^{j+1}-1} \sin^{-2} \theta_{j+1,s} =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{3j+3}} \right) - \frac{2}{2^{3j+3}} \sum_{s=1}^{2^j-1} \sin^{-2} \theta_{j+1,s} -$$

$$\frac{1}{2^{3j+3}} \left[\frac{1}{3} (2^{2j+2} - 1) - \sum_{s=1}^{2^j-1} \sin^{-2} \theta_{j+1,s} \right] =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{3j+3}} \right) - \frac{1}{3 \cdot 2^{3j+3}} (2^{2j+2} - 1) - \frac{1}{2^{3j+3}} \sum_{s=1}^{2^j-1} \sin^{-2} \theta_{j+1,s} =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{3j+3}} \right) - \frac{1}{3 \cdot 2^{3j+3}} (2^{2j+2} - 1) - \frac{1}{2^{3j+3}} \cdot \frac{1}{3} (2^{2j+1} - 2) =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{j+2}} + \frac{1}{2^{3j+1}} \right) = \frac{1}{3N} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{N^2} \right) \geq \frac{1}{6N}$$

再由(6) 式得

$$0 < \alpha / (6N) \leq \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} \leq \gamma N \cdot 4 / (3N) = 4/3 \gamma$$

因此 $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq \frac{8\gamma N}{\alpha}$, 即 $\text{cond}(\mathbf{D}_{00}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = O(N)$.

参考文献:

- [1] CHEN W S LIN W. Hadamard singular integral equation and its Hermite wavelet methods [A] . In: KAJIWARA J eds. Proc of the fifth international colloquium on finite or infinite dimensional complex analysis [C] . Beijing: 1997. 13 ~ 22.
- [2] QUAK E. Trigonometric wavelets for Hermite interpolation [J] . Mathematic of Computation, 1996, 65: 683 ~ 722.
- [3] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论 [M] . 北京: 科学出版社, 1993. 118 ~ 120.
- [4] LIONS J L, Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems and applications [M] . Berlin: Springer-Verlag, 1972. 18 ~ 19.

On the Condition Number of Natural Boundary Wavelet Element Stiffness Matrix

CHEN Wen-sheng^{*}, ZHANG Yong-hu

Abstract: This paper shows that the condition number of stiffness matrix is $O(N)$, where N is the equally spaced node number on the boundary. Here the stiffness matrix is induced by applying Quick-wavelet method to the Neumann boundary value problem of Laplacian equation in the unit disk.

Keywords: Laplacian equation; wavelet; stiffness matrix; condition number

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China