

文章编号: 0529-6579 (2000) 02-0131-02

平均曲率流的第Ⅲ类奇点^{*}

陈 兵 龙

(中山大学数学系, 广州 510275)

关键词: 平均曲率流; 扩张的梯度 Soliton

中图分类号: 0186.16 **文献标识码:** A

设 M^n 是欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的一张超曲面, 让 M^n 沿着它的法向方向形变, 速度等于它的平均曲率 H , 即

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = H(p, t), p \in M^n \quad (1)$$

其中, $F(p, t)$ 是 M^n 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的坐标向量.

最早研究平均曲率流方程 (1) 的是 Huisken^[1], 他研究了方程 (1) 解的短时间存在性, 在研究解的长时间行为时通过 blow up 得到 3 类奇点模型. 对第Ⅰ类奇点 Huisken 做了完整的分类, 对第Ⅱ类奇点 Hamilton 证明它是梯度 Soliton. 本文利用类似的技巧证明第Ⅲ类奇点是扩张的梯度 Soliton.

设 g_{ij} 是 M^n 从 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中诱导的度量, h_{ij} 是 M^n 上的第Ⅱ基本形式, 那么方程 (1) 等价于 $\partial g_{ij} / \partial t = -2Hh_{ij}$. 所谓 Soliton 是指上述方程的一种特解, 它是在某个单参数的微分同胚群作用下的解. 如果 x 是由该单参数微分同胚群生成的向量场, 那么, $\partial g_{ij} / \partial t = L_x g_{ij}$; 如果是扩张的梯度 Soliton 的话, 上述方程更化为 $D_i D_j f = Hh_{ij} + 1/(2t)g_{ij}$. 其中, f 是 M^n 上的某个光滑函数.

定理 对于方程 (1) 的任何严格凸的解, 如果解的存在时间达到 $+\infty$, 且 tH^2 在时空某点取得其极大值, 那么该解一定是扩张的梯度 Soliton.

在证明定理之前, 我们先回忆 Harnack 不等式. 事实上, Harnack 不等式与 Soliton 的存在性有密切的关系, 在后面的论证中会清楚地看到这点.

命题^[2] 对任何方程 (1) 的弱凸解有

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2t}H + 2DH(V) + H(V, V) \geq 0 \quad (2)$$

对所有的切向量 V 都成立.

如果固定某个向量丛 X , 这个向量丛就是 $t=0$ 时刻 $(M^n, g_{ij}(0))$ 的切丛, 再令 F_a^i 是从 X 到 t 时刻的切丛的等距, 那么 F_a^i 一定满足 $\partial F_a^i / \partial t = g^{ij} H h_{jk} F_a^k, g_{ij} F_a^i F_b^j = I_{ab}$. 其中, a 是 X 空间上的指标, i 是目标空间上的指标. 这样可把所有在 $(M, g_{ij}(t))$ 上的量都拉回到 X 上考

^{*} 收稿日期: 1999-11-05 作者简介: 陈兵龙 (1974~), 男, 博士.

虑. 将协变导数也一并拉回到 X 上, 例如 $V_a = F_a^i V_i, H_{ab} = F_a^i F_b^j H_{ij}, D_a V_b = F_a^i F_b^j D_i V_j$, 等等.

如果令 $X_a = D_a H + H_{ab} V_b, Y_{ab} = D_a V_b - H H_{ab} - \frac{1}{2t} g_{ab}$,

$$Z = D_t H + \frac{H}{2t} + 2V_a D_a H + H_{ab} V_a V_b, W_{ab} = D_t H_{ab} + V_c D_c H_{ab} + \frac{1}{2t} H_{ab}, \quad (3)$$

$$W = D_t H + V_c D_c H + \frac{1}{2t} H, U_a = (D_t - \Delta) V_a + H_{ab} D_b H + \frac{1}{t} V_a$$

那么, 经过计算可得

$$(D_t - \Delta) Z = |H_{ab}|^2 Z + 2X_a U_a - 2H_{bc} Y_{ab} Y_{ac} - 4Y_{ab} W_{ab} \quad (4)$$

定理的证明 根据假设 tH^2 在时空某点 (x_0, t_0) 取得极大值, 不妨设 $t_0 > 0$, 那么当 $V = 0$, Harnack 量 Z 在 (x_0, t_0) 处一定等于 0. 对方程(4) 用强极值原理, 那么对时空上任一点 $(x, t), t < t_0$, 都有某个向量 V 使 Z 等于 0. 根据命题(2), $Z \geq 0$. 对 V 作变分, 得到

$$D_a H + H_{ab} V_b = 0 \quad (5)$$

因为 H_{ab} 严格正定, 所以 V 可以唯一反解出来, 并形成光滑的时空截面.

任给一点 $(x_1, t_1), t_1 < t_0$, 因为 Z 在 V 取得极小, 所以任意延拓在 x 邻域上的 V 的值, $Z(V)(x_1, t_1)$ 仍然取得极小. 所以虽然 V 在 (x_1, t_1) 点的值是固定的, 但可延拓使 $D_a V_b$ 以及 $(D_t - \Delta) V_a$ 在 (x_1, t_1) 点的取值任意, 特别地, 一旦选取延拓使方程(3) 中的 $Y_{ac} = -W_{ab} H_{bc}^{-1}$, 那么利用极值原理于(4) 式得 $0 \leq H_{bc}^{-1} W_{ab} W_{ac}$, 再由 H_{bc} 的正定性, $W_{ab} = 0$, 所以得到 $D_t H_{ab} + V_c D_c H_{ab} + \frac{1}{2t} H_{ab} = 0$. 由 H_{ab} 的方程及 Gauss, Codazzi 方程可得 $D_t H_{ab} = D_a D_b H + H H_{ac} H_{bc}$, 将其代入上式得

$$D_a D_b H + H H_{ac} H_{bc} + D_c H_{ab} V_c + \frac{1}{2t} H_{ab} = 0 \quad (6)$$

另一方面, 将(5) 式微分得 $D_a D_b H + D_a H_{bc} V_c + H_{bc} D_a V_c = 0$, 再结合方程(6) 及 Codazzi 方程可得 $H_{bc} D_a V_c = H H_{ac} H_{bc} + \frac{1}{2t} H_{ab}$

$$\text{即 } H_{bc} (D_a V_c - H H_{ac} - \frac{1}{2t} g_{ac}) = 0$$

因为 H_{bc} 可逆, 所以 $D_a V_c = H H_{ac} + 1/(2t) g_{ac}$. 由上式知道 $D_a V_c = D_c V_a$, 因为 M 是单连通, 所以上式可积, 即存在函数 f 使 $D_a f = V_a$, 也就是说 $D_a D_b f = H H_{ab} + 1/(2t) g_{ab}$. 定理证毕.

参考文献:

- [1] HUISKEN G. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow[J]. J Diff Geo, 1990, 31: 285 ~ 299.
- [2] HAMILTON R. Harnack estimate for the mean curvature flow[J]. J Diff Geo, 1995, 41: 215 ~ 226.

Type III Singularity of Mean Curvature Flow

CHEN Bing-long

Abstract: The singularity model of the mean curvature flow is studied and it is shown that the type III singularity must be the expanding gradient Soliton.

Keywords: mean curvature flow; expanding gradient Soliton

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China