

文章编号: 0529-6579 (1999) 06-0001-05

强非线性迫振系统的频率展开法^{*}

黄 颢 彪¹, 胡 敏², 陈森林³, 廖德驹¹

(1. 中山大学应用力学与工程系, 广州 510275; 2. 中山大学计算机科学系;
3. 广州第七中学)

摘 要: 将描述迫振系统的强非线性微分方程, 化为以相角为自变量、振动瞬时频率为未知函数的积分方程; 将系统的非线性恢复力表示为线性主部和非线性辅部; 将频率和干扰力展开为参数的幂级数; 确定时间与相角的近似关系, 比较参数的同次幂级数, 得到系统的周期解及振幅-频率响应曲线.

关键词: 强非线性迫振系统; 积分方程; 频率展开法

中图分类号: O 322 **文献标识码:** A

与近 10 多年强非线性自治系统的一系列研究成果相比, 强非线性非自治系统的解析法研究工作尚少. 其中, 文 [1] 用多重尺度法研究了 Duffing 振子

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon \alpha x^3 = \epsilon(-2\mu\dot{x} + \kappa \cos \Omega t) \quad (1)$$

文 [2] 利用非线性变换的思想研究了更一般的非自治系统

$$\ddot{x} + g(x) = \epsilon f(x, \dot{x}, \Omega t) = \epsilon F_1(x, \dot{x})\dot{x} + \epsilon F_2(\Omega t) \quad (2)$$

有关结果以 Bessel 系数的积分形式表示, 给出了强非线性非自治系统的一种研究途径. 本文给出种称为频率展开的近似法. 本法将系统的非线性恢复力表示成线性“主部”和非线性“辅部”的组合; 将无理根式表示的固有频率近似表示为二项有理式; 将响应频率和干扰力展开为参数的幂级数. 从而使迫振系统的一阶近似解可以显式表示.

1 频率展开法

研究形如式 (2) 的强非线性非自治系统, 式 (2) 中, $g(x), f(x, \dot{x}, \Omega t)$ 是其变量的非线性函数, 分别表征非线性恢复力和干扰力, ϵ 是参数, $(\dot{}) \triangleq d()/dt$, $(\ddot{}) \triangleq d^2()/dt^2$.

设时间 t 与相角 τ 满足下列关系

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega(\tau) = \omega_0(\tau) + \epsilon\omega_1(\tau) + \epsilon^2\omega_2(\tau) + \dots \quad (3)$$

其中, $\omega_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 是 τ 的 2π 周期待定函数. 则

^{*} 基金项目: 广东省自然科学基金 (960029) 资助项目

收稿日期: 1999-03-05 作者简介: 黄颢彪, 男, 1950 年生, 副教授.

$$t = t_0 + Q(\tau), \quad Q(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\theta}{\omega_0(\theta)} + O(\epsilon) \quad (4)$$

式(3)中, $\omega_0(\tau)$ 和 $\omega(\tau)$ 分别表征系统(2)的固有频率和响应频率. 记

$$x = a \cos \tau + b$$

$$D(a) = -a \int_f^{2\pi} (a \cos \tau + b, -a\omega(\tau) \sin \tau, \Omega_0 + \Omega_Q(\tau)) \sin \tau d\tau \quad (5)$$

式(5)中, a 和 b 分别表征振幅和偏心距. 类似于文 [3], 有

定理 1) 系统(2)有形如式(5)的周期解的必要条件是 $D(a)=0$;

2) 系统(2)有形如式(5)的周期解的充分条件是 $D(a)=0$ 且 0 不是 $D(a)$ 的极值;

3) 若 $D(a)=D'(a)=\dots=D^{(2n)}(a)=0, D^{(2n+1)}(a)<0(>0)(n=0, 1, 2, \dots)$, 则系统

(2)有形如式(5)的稳定周期解;

4) 若 $D(a)=0, D'(a)<0(>0)$, 则系统(2)有形如式(5)的唯一且稳定周期解.

将恢复力 $g(x)$ 表示为线性主部 $\nu^2 x$ 及非线性辅部 $G(x)$, 即

$$g(x) = \nu^2 x + G(x) \quad (6)$$

其中, $\nu > 0$ 是常数, 可由观察法或下式确定

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \sum_{i=1}^m [\nu^2 x_i - g(x_i)]^2 = 0 \quad (7)$$

这里, m 宜不小于 3, $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 互异且在 $g(x)$ 的定义域内. 由式(5)得

$$\dot{x} = -a\omega(\tau) \sin \tau, \quad \ddot{x} = -\frac{a}{2 \sin \tau} \frac{d}{d\tau} (\omega^2 \sin^2 \tau) \quad (8)$$

将式(4)~(6)和(8)代入式(2)并对 τ 从 0 开始积分, 可得

$$\omega^2 \sin^2 \tau = \nu^2 \sin^2 \tau + \frac{2}{a^2} [\nu^2 ab(1 - \cos \tau) + W(a+b) - W(a \cos \tau + b)] -$$

$$\frac{2\epsilon}{a} \int_0^\tau f(a \cos \tau + b, -a\omega \sin \tau, \Omega_0 + \Omega_Q(\tau)) \sin \tau d\tau \quad (9)$$

其中, $W(x) = \int_0^x G(u) du$.

式(9)是关于瞬时响应频率 ω 的积分方程. 一般地, 寻找精确满足式(9)的 ω 是困难的. 为此利用式(3)即将 ω 按参数 ϵ 展开 (故称本法为频率展开法). 相应地, 将干扰力 $\epsilon f(a \cos \tau + b, -a\omega \sin \tau, \Omega_0 + \Omega_Q(\tau))$ 展开为 ϵ 的幂级数

$$\epsilon f(a \cos \tau + b, -a\omega \sin \tau, \Omega_0 + \Omega_Q(\tau)) = \epsilon f(a \cos \tau + b, -a\omega_0 \sin \tau, \Omega_0 +$$

$$\Omega_Q(\tau) - \epsilon^2 a \omega_1 f'_x(a \cos \tau + b, -a\omega_0 \sin \tau, \Omega_0 + \Omega_Q(\tau)) \sin \tau + \dots \quad (10)$$

将式(3)和(10)代入式(9)并比较 ϵ 的同次幂系数, 有

$$\epsilon^0: \omega_0^2 \sin^2 \tau = \frac{\nu^2}{a} [a \sin^2 \tau + 2b(1 - \cos \tau)] + \frac{2}{a^2} [W(a+b) - W(a \cos \tau + b)]$$

$$\epsilon^1: \omega_0 \omega_1 \sin^2 \tau = -\frac{1}{a} \int_0^\tau f(a \cos \theta + b, -a\omega_0 \sin \theta, \Omega_0 + \Omega_Q(\theta)) \sin \theta d\theta$$

$$\epsilon^2: \omega_0 \omega_2 \sin^2 \tau = -\frac{\omega_1^2}{2} \sin^2 \tau + \int_0^\tau \omega_0 \omega_1 f'_x(a \cos \theta + b, -a\omega_0 \sin \theta, \Omega_0 + \Omega_Q(\theta)) \sin \theta d\theta$$

.....

由式(11)可得

$$\begin{aligned}\omega_0(\tau) &= \left\{ \nu^2 + \frac{2}{a^2 \sin^2 \tau} [\nu^2 ab(1 - \cos \tau) + W(a+b) - W(a \cos \tau + b)] \right\}^{1/2} \approx \\ &\quad \nu + \frac{1}{a^2 \nu \sin^2 \tau} [\nu^2 ab(1 - \cos \tau) + W(a+b) - W(a \cos \tau + b)] \\ \omega_1(\tau) &= -\frac{1}{a\omega_0 \sin^2 \tau} \int_0^\tau f(a \cos \theta + b, -a\omega_0 \sin \theta, \Omega_{t_0} + \Omega_Q(\theta)) \sin \theta d\theta \\ \omega_2(\tau) &= -\frac{\omega_1^2}{2\omega_0} + \frac{1}{\omega_0 \sin^2 \tau} \int_0^\tau \omega_0 \omega_1 f'_x(a \cos \theta + b, -a\omega_0 \sin \theta, \Omega_{t_0} + \Omega_Q(\theta)) \sin \theta d\theta \\ &\quad \dots\dots\end{aligned}\quad (12)$$

于是系统(2)的瞬时频率为

$$\omega(\tau) = \omega_0(\tau) + \epsilon \omega_1(\tau) + \epsilon^2 \omega_2(\tau) + \dots \quad (13)$$

将式(13)代入式(9)并分别令 $\tau = \pi$ 和 2π , 得

$$2ab\nu^2 + W(a+b) - W(-a+b) - \epsilon a \int_0^\pi f(a \cos \tau + b, -a\omega \sin \tau, \Omega_{t_0} + \Omega_Q(\tau)) \sin \tau d\tau = 0 \quad (14)$$

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b, -a\omega \sin \tau, \Omega_{t_0} + \Omega_Q(\tau)) \sin \tau d\tau = 0 \quad (15)$$

联立式(14)和(15)可确定 a 和 b . 于是系统(2)的周期振动的振型、频率和周期分别为

$$\begin{aligned}x &= a \cos \tau + b, \quad \omega(\tau) = \omega_0(\tau) + \epsilon \omega_1(\tau) + \epsilon^2 \omega_2(\tau) + \dots \\ T &= \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\omega(\tau)}\end{aligned}\quad (16)$$

对共振情形, 干扰周期 $T^* = 2\pi/\Omega$ 与响应周期 T 的关系是 $T^*/T \approx m/n$, 即

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\omega(\tau)} = \frac{2n\pi}{m\Omega} \quad (17)$$

其中, m 和 n 是互质正整数. 联立式(15)和(17)并消去 t_0 , 可得振幅-频率响应曲线方程.

2 应 用

例 1 考虑 Duffing 振子的受迫振动系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon \alpha x^3 = \epsilon(-2\mu \dot{x} + \kappa \cos \Omega t) \quad (18)$$

其中, ω_0 , α , μ 和 κ 是常数, Ω 是干扰频率, $\epsilon > 0$ 是参数.

将式(18)恒等变形为 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon(-2\mu \dot{x} - \alpha x^3 + \kappa \cos \Omega t)$, 并由式(4)得 $t = t_0 + \tau/\omega_0 + O(\epsilon)$. 为了便于与文[2]比较, 考虑共振情形, 即 $\Omega \approx \omega_0$. 考虑式(15)的 0 阶近似, 可得($b = 0$)

$$a\mu\omega_0 - (\kappa/2)\sin \Omega_{t_0} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad &\int_0^\tau f(a \cos \theta, -a\omega_0 \sin \theta, \Omega_{t_0} + \Omega_Q(\theta)) \sin \theta d\theta = \\ &\left[\frac{\kappa}{2} \cos \Omega_{t_0} - \frac{3\alpha a^3}{8} - \frac{\alpha a^3}{8} \cos 2\tau \right] \sin^2 \tau\end{aligned}\quad (20)$$

将式(20)代入式(14), 得 $\omega_1(\tau) = \frac{3\alpha a^2}{8\omega_0} - \frac{\kappa}{2a\omega_0} \cos \Omega_{t_0} + \frac{\alpha a^2}{8\omega_0} \cos 2\tau$. 于是响应频率的一阶近

似为

$$\omega(\tau) = A + B \cos 2\tau \quad (21)$$

其中, $A = \omega_0 + \epsilon \left[\frac{3\alpha a^2}{8\omega_0} - \frac{\kappa}{2a\omega_0} \cos \Omega t_0 \right]$, $B = \epsilon \frac{\alpha a^2}{8\omega_0}$. 将式(21)代入式(17)($m = n$), 可得

$$\left[\omega_0 + \epsilon \left[\frac{3\alpha a^2}{8\omega_0} - \frac{\kappa}{2a\omega_0} \cos \Omega t_0 \right] \right]^2 - \frac{\epsilon^2 \alpha^2 a^4}{64\omega_0^2} = \Omega^2 \quad (22)$$

令 $\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$, 其中, σ 是频率解谐参数. 将上式代入式(22) 并取 ϵ 的一阶近似, 有

$$3\alpha a^3 - 4\kappa \cos \Omega t_0 = 8a\omega_0 \sigma \quad (23)$$

联立式(19) 和 (23), 消去 t_0 , 得系统(18) 的振幅频率响应曲线

$$[\mu^2 + (\sigma - (3/8)\alpha a^2)^2] a = \kappa / (4\omega_0^2)$$

这与文[2] 用多重尺度法的结果完全一致.

例2 研究强非线性 Duffing 振子

$$\ddot{x} + x^3 = \epsilon(-2\mu x + \kappa \cos \Omega t) \quad (24)$$

其中, μ 和 κ 是常数, $\epsilon > 0$ 是参数, Ω 是干扰频率.

将系统(24) 的非线性恢复力 x^3 表示为线性“主部” $\omega_0^2 x$ 及非线性“辅部” $x^3 - \omega_0^2 x$, 即 $x^3 = \omega_0^2 x + (x^3 - \omega_0^2 x)$, 并将式(24) 恒等变形为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon[-2\mu x + \beta(\omega_0^2 x - x^3) + \kappa \cos \Omega t]$$

其中, $\beta = 1/\epsilon$. 为方便与现有结果比较, 考虑主共振情形

$$\omega_0 = \Omega + \epsilon\sigma \quad (25)$$

这里, σ 是频率解谐参数. 由式(4) 得时间 t 与相角 τ 的关系近似为 $t = t_0 + \tau/\omega_0 + O(\epsilon)$.

由式(14) 得

$$\omega_1(\tau) = -\frac{1}{a\omega_0 \sin^2 \tau} \left[\left(\mu a \omega_0 - \frac{\kappa}{2} \sin \Omega t_0 \right) \left(\tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau \right) + \frac{1}{4} \left(2\beta a \omega_0^2 - \frac{3}{2} \beta a^3 + 2\kappa \cos \Omega t_0 - \frac{\beta a^3}{2} \cos 2\tau \right) \sin^2 \tau \right] \quad (26)$$

由 $\omega_1(\tau)$ 关于 τ 的 2π 周期性知, 式(26) 中 τ 的系数须为 0, 即

$$\mu a \omega_0 - (\kappa/2) \sin \Omega t_0 = 0 \quad (27)$$

则 $\omega_1(\tau) = \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} - \frac{\beta \omega_0}{2} - \frac{\kappa}{2a\omega_0} \cos \Omega t_0 + \frac{\beta a^2}{8\omega_0} \cos 2\tau$, 于是, 系统(24) 的一阶近似瞬时频率为

$$\omega = \frac{1}{8a\omega_0} (A + a^3 \cos 2\tau) \quad (28)$$

其中, $A = 4a\omega_0^2 + 3a^3 - 4\epsilon\kappa \cos \Omega t_0$. 将式(28) 代入式(17), 并令式(25) 中 $\sigma = 0$, 可得振幅频率响应曲线方程 $(4a\Omega^2 + 3a^3 - 4\epsilon\kappa \cos \Omega t_0)^2 - a^6 = 64a^2 \mu^2$. 其中, $\cos \Omega t_0$ 由式(29) 给出

$$\cos \Omega t_0 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \Omega t_0} = \pm \frac{1}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 - 4a^2 \mu^2 \Omega^2} \quad (29)$$

图 1 给出了 $\epsilon = 1$, $\mu = 0.1$ 和 $\kappa = 20$ 时幅频曲线的 3 种方法比较. 式(29) 右边取正值时, 对应图中的实线, 即解答稳定; 取负值时, 对应图中的虚线, 相应的解答不稳定. 当 $\cos \Omega t_0 = 0$ 时, 对应曲线的极大值点即脊骨线的上端点, 此时的 $\Omega = 9.29$, $a = 10.82$.

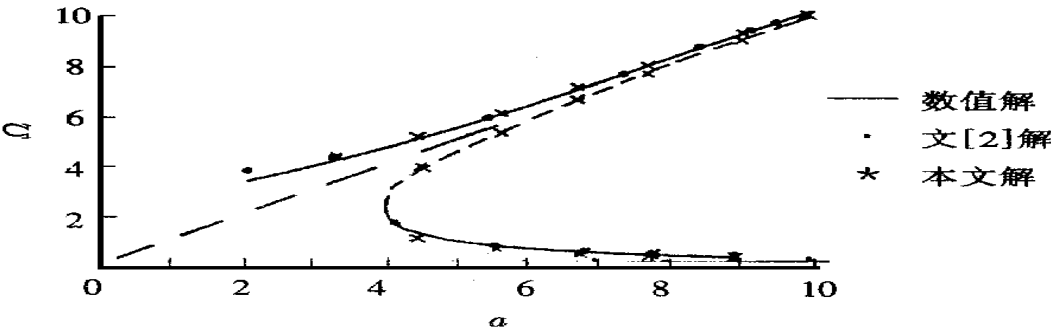


图 1 系统 (24) 当 $\epsilon=1$, $\mu=0.1$ 和 $\kappa=20$ 时的共振曲线

Fig. 1 Amplitude-frequency resonance curve of Eq. (24)

3 结 语

文中例子在考虑主共振时，对有关公式作了一系列恒等变形、近似和简化，但仍能获得较好的精度，尤其是例 2 的幅频曲线，能用比较简单的显式描述幅频曲线（包括不稳定共振曲线即图 1 中的虚线段及曲线的峰点），精度尚可，这对工程技术中的定性分析，具有一定的实际意义。

参考文献：

[1] NAYFEH A H, MOOK D T. Nonlinear oscillations [M]. New York: Wiley Interscience, 1979. 1~38.
[2] XU Z. Nonlinear time transformation method of strong nonlinear oscillation systems [J]. Acta Mechanica Sinica, 1992, 8 (3): 279~288.
[3] 黄赤彪. 强非线性动力系统周期解分析 [J]. 应用力学学报, 1994, 11 (4): 1~10.

Frequency Expansion Method for Strongly Nonlinear Forced Oscillation Systems

HUANG Cheng-biao^{*}, HU Ming, CHEN Sen-lin, LIAO De-ju

Abstract: The strongly nonlinear differential equation which is modelled on the forced oscillation systems, is described as an integration equation in terms of the independent variable with the phase angle and the unknown function with frequency. The nonlinear restoring force is expressed into both parts of the linear mainbody and the nonlinear auxiliary. The frequency and excitation force is indicated as power series of the parameter. The approximation relationship between phase angle and time is determined. The periodic solution and the response curve are obtained by equating the coefficient of the corresponding terms of parameter.

Keywords: strongly nonlinear forced oscillation system; integration equation; frequency expansion method

^{*} Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net