

文章编号: 0529-6579 (2000) S2-0006-03

循环双周期系统控制方程的解耦*

高 磊, 刘济科

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要: 证明了 U 变换方法可使具有循环双周期特性的运动方程组 (代数或微分方程组) 解耦, 给出了解耦方程的基本形式, 所得结果可广泛应用于循环双周期系统的静力与动力分析.

关键词: 双周期系统; U 变换; 解耦

中图分类号: O342; TH113 **文献标识码:** A

自从蔡承武^[1]在国际上首次提出 U 变换方法以来, 该法在周期结构系统分析中得到广泛应用^[2,3]. 它的一个突出特点是能使具有周期性的系统控制方程解耦^[4]. 最近, 陈汉铨等^[5]出版专著, 对 U 变换方法的物理意义及其应用进行了全面论述. 本文将 U 变换方法推广到双周期结构系统的分析, 重点讨论具有循环双周期特性的控制方程的解耦原理.

1 循环双周期方程

若系统控制方程的系数矩阵是由具有循环周期性但周期不同的两个矩阵叠加而成, 则该方程称为循环双周期方程. 循环双周期方程的常见形式可表示为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & \cdots & K'_{1N} \\ K'_{21} & K'_{22} & \cdots & K'_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K'_{N1} & K'_{N2} & \cdots & K'_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中, N 表示子结构总数, $x_j, F_j (j = 1, 2, \cdots, N)$ 分别表示第 j 个子结构的位移及载荷矢量, K 是刚度矩阵. $K_{r,s}, K'_{r,s} (r, s = 1, 2, \cdots, N)$ 具有循环周期性但周期不同, 即

$$K_{11} = K_{22} = \cdots = K_{NN} \quad (2a)$$

$$K_{s1} = K_{s+1,2} = \cdots = K_{N,N-s+1} = K_{1,N-s+2} = \cdots = K_{s-1,N}, \quad s = 2, 3, \cdots, N \quad (2b)$$

$$K'_{11} = K'_{1+p,1+p} = \cdots = K'_{1+(n-1),1+(n-1)p} = K^0, \text{ 其它 } K'_{r,s} = 0, N = np \quad (2c)$$

(1) 式的第 j 个分量方程是

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (001180); 中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (99M6)

收稿日期: 2000-10-15; 作者简介: 高 磊 (1967~), 女, 助理研究员.

$$\sum_{u=1}^N K_{u,1} x_{j-u+1} = F_j, j \neq 1, 1+p, \dots, 1+(n-1)p; j = 1, 2, \dots, N \quad (3a)$$

$$\sum_{u=1}^N K_{u,1} x_{j-u+1} = F_j - K^0 x_j, j = 1, 1+p, \dots, 1+(n-1)p \quad (3b)$$

其中, $x_{-s} \equiv x_{N-s} (s = 0, 1, 2, \dots, N-1)$.

2 循环双周期方程的解耦

对方程 (3) 进行 U 变换 $x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{i(j-1)m\psi} q_m (j = 1, 2, \dots, N, \psi = 2\pi/N)$, 可得

$$q_m = a_m^{-1} (f_m + f_m^0), m = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

其中
$$a_m = \sum_{u=1}^N e^{-i(u-1)m\psi} K_{u,1} \quad (5a)$$

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i(j-1)m\psi} F_j \quad (5b)$$

$$f_m^0 = -\frac{K^0}{\sqrt{N}} \sum_{u=1}^N e^{-i(u-1)m\psi} x_{1+(u-1)p} \quad (5c)$$

(4) 式代入 U 变换式得

$$x_j = x'_j + x_j^0, j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

其中

$$x'_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{i(j-1)m\psi} a_m^{-1} f_m, x_j^0 = -\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N \left(\sum_{m=1}^N e^{i[(j-1)-(u-1)p]m\psi} a_m^{-1} \right) K^0 x_{1+(u-1)p} \quad (7)$$

可见, x'_j 表示 $K^0 = 0$ 时方程 (1) 的解, x_j^0 表示 K^0 对解 x_j 的影响.

引入记号 $X_s \equiv x_{1+(s-1)p}, X'_s \equiv x'_{1+(s-1)p} (s = 1, 2, \dots, n)$, 并将 $j = 1 + (s-1)p$ 代入 (6)、(7) 式可得

$$X_s + \sum_{u=1}^n \beta_{s,u} X_u = X'_s, s = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

其中
$$\beta_{s,u} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{i(s-u)p m \psi} a_m^{-1} K^0, s, u = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

且 $\beta_{s,u}$ 具有循环周期性. 因此, 通过一次 U 变换, 含有 N 个未知矢量的循环双周期方程 (1) 变成仅含有 $n (= N/p)$ 个未知矢量的循环单周期方程 (8). 为进一步使方程 (8) 解耦, 必须再次应用 U 变换. 对所考虑的情况, 相应的 U 变换及其反变换分别是

$$X_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n e^{i(s-1)r\varphi} Q_r, s = 1, 2, \dots, n \quad (10a)$$

$$Q_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n e^{-i(s-1)r\varphi} X_s, r = 1, 2, \dots, n \quad (10b)$$

其中, $\varphi = 2\pi/n = p\psi$.

用 $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n e^{-i(s-1)r\varphi}$ 前乘 (8) 式的 2 边, 并利用 $\beta_{s,u}$ 的循环周期性, 得

$$Q_r + \sum_{j=1}^n e^{-i(j-1)r\varphi} \beta_{j,1} Q_r = b_r, r = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

其中

$$b_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n e^{-i(s-1)r\varphi} X_s' \quad (12a)$$

$$\beta_{j,1} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{i(j-1)m\varphi} a_m^{-1} K^0 \quad (12b)$$

(12b) 式代入(11) 式, 可得

$$A_r Q_r = b_r \quad (13)$$

$$A_r = I + \frac{1}{p} \left(\sum_{u=1}^p a_{r+(u-1)n}^{-1} \right) K^0, r = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

由此可见, 通过 2 次 U 变换, 可将方程(1) 解耦成一组独立方程, 即(13) 式, 而每个独立方程仅含一个未知矢量. 对给定的 r , 未知数的个数与单一子结构的自由度数相同. 比较(5) 和(10b) 式, 考虑到 $\varphi = p\psi$, 可得

$$f_{r+(u-1)n}^0 = -\frac{1}{\sqrt{p}} K^0 Q_r, r = 1, 2, \dots, n; u = 1, 2, \dots, p \quad (15)$$

于是, 给定(1) 中的参数, 由以上推得的有关方程可求得 $x_j (j = 1, 2, \dots, N)$.

致谢: 感谢蔡承武教授、陈树辉教授所给予的帮助和指导.

参考文献:

- [1] 蔡承武, 吴福光. 旋转周期结构的振动. 中山大学学报(自然科学版), 1983, 22 (3): 1~9.
- [2] CAI C W, CHEUNG Y K, CHAN H C. Dynamic response of infinite continuous beams subjected to a moving force - an exact method. Journal of Sound and Vibration, 1988, 123 (3): 461~472.
- [3] CAI C W, CHEUNG Y K, CHAN H C. Transverse vibration analysis of plane trusses by analytical method. Journal of Sound and Vibration, 1989, 133 (1): 139~150.
- [4] CAI C W, CHEUNG Y K, CHAN H C. Uncoupling of dynamic equations for periodic structures. Journal of Sound and Vibration, 1990, 139 (2): 253~263.
- [5] CHAN H C, CAI C W, CHEUNG Y K. Exact analysis of structures with periodicity using U-transformation. Singapore: World Scientific, 1998. 1~10.

Uncoupling of Governing Equations for Cyclic Bi-periodic Structures

GAO Lei^{*}, LIU Ji-ke

Abstract: The advantage of applying the U-transformation method is to make it possible for the linear simultaneous equations, either algebraic or differential equations, with cyclic bi-periodicity properties to uncouple. This paper provides a rigorous proof for this significant statement and gives the form of the uncoupled equations. The result can be easily used in the procedure to obtain the solutions for static and dynamic analyses of bi-periodic structures.

Keywords: bi-periodic structures; U-transformation; uncoupling

^{*} Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China