

关于二阶波浪绕射势稳态解边值问题*

方 颖, 吴建华

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要: 对有限水深情形下多色波场中任意形状三维物体的二阶波浪绕射问题. 视正弦扰动速度势为某一恰当初值问题的稳态解, 并以波陡为小参数, 采用正则摄动展开法, 导出了一阶与二阶绕射问题的摄动方程, 进而利用 Laplace 变换和 Tauber 定理, 给出了隐含有恰当的远场辐射条件的二阶稳态解边值问题的提法.

关键词: 非线性水波; 波浪力; 波浪绕射和散射

中图分类号: O353.2 **文献标识码:** A

基于人们深入了解海洋波浪动力学过程以及解决水利、港湾、船舶与离岸工程等实际问题的需要, 水波和结构物间的非线性相互作用受到人们的广泛关注和长期的研究^[1]. 受到最深入研究的是二阶波浪绕射问题, 困扰人们的主要难点则是如何给出问题的适定提法, 其症结源于研究者在研究二阶问题时从稳态出发之故. 在牛顿力学体系中, 按 Stoker^[2]的观点, 若人们想研究物体的运动过程须先知道其初始态. 为克服数学描述二阶辐射条件的困难, 人们另辟蹊径, 发展了一些新方法. 对来波为均匀 Stokes 波, 水平有限深海底情形, Wu 等^[3]针对固定于海底的三维物体发展了一种非线性二阶绕射理论. 他们通过将正弦扰动势视为相应初边值问题的稳态解, 导出了二阶稳态散射势边值问题及其解的表达式, 给出了二阶辐射条件. 本文在二阶 Stokes 波浪绕射问题的研究工作基础上, 给出多色波场中二阶波浪绕射稳态解边值问题的一种合理提法.

1 初值问题的提法

考虑水深 H 为常数, 固定于海底之物体在入射波浪场中的绕射问题(图 1). 取固结于物体上的笛卡儿坐标系 $O - x_1 x_2 x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, x_3 轴的方向垂直向上, $x_3 = 0$ 表示平均水面, $x_3 = -H$ 为海底表面. 假定流场有势, S_B

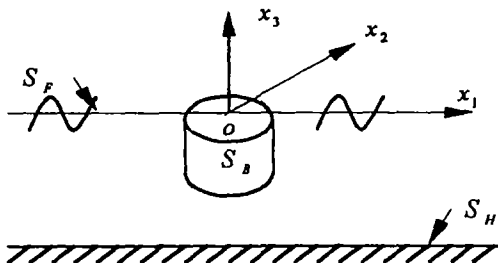


图 1 坐标示意图

* 基金项目: 广东省重点科技攻关计划资助项目 (99M048)

收稿日期: 2000-03-02; 作者简介: 方 颖 (1966~), 女, 讲师.

为物体湿表面, $\mathbf{n}$ 为物面单位外法向矢量, ζ 为波高, Φ^I 和 Φ^S 分别为入射和散射速度势, $\partial_j = \partial/\partial x_j (j = 1, 2, 3)$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. 这样, 总的速度势 Φ 满足 Laplace 方程和下述边界条件:

$$\partial_t^2 \Phi + g \partial_3 \Phi + \partial_t (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) = 0 \quad \text{on } x_3 = \zeta \quad (1)$$

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = -g\zeta$$

$$\partial_3 \Phi = 0, \text{ on } x_3 = -H; \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = 0, \text{ on } \mathbf{x} \in S_b; \Phi^S = \Phi - \Phi^I \rightarrow 0, \text{ as } r \rightarrow \infty \quad (2)$$

为求解速度势 Φ , 还须附加恰当的初始条件于自由面条件(1)中. 为方便起见, 令:

$$\Phi^S(\mathbf{x}, 0) = 0, \partial_t \Phi^S(\mathbf{x}, 0) = 0, \text{ on } x_3 = \zeta \quad (3)$$

上式的物理含义为: 在初始时刻, 自由面上之压力和波型扰动为零.

2 二阶稳态解边值问题

对弱非线性水波, 可以波陡 ϵ 为小参数将速度势 Φ 和波高 ζ 作正则摄动展开, 即

$$\Phi = \epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)} + \cdots; \quad \zeta = \epsilon \zeta^{(1)} + \epsilon^2 \zeta^{(2)} + \cdots \quad (4)$$

其中, $\Phi^{(n)} = \Phi_n^S + \Phi_n^I$, Φ_n^I 和 Φ_n^S 分别为第 n 阶入射和散射势. 设来波之线性项为一列具有不同频率 $\{\omega_n\}$ 和振幅 $\{A_n\}$ 的规则平面进行波的线性迭加, 于是有:

$$\Phi_1^I = \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} \{ \varphi_m(\mathbf{x}) \exp(-i\omega_m t) \}, \Phi_1^S = \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} \{ \phi_m(\mathbf{x}, t) \exp(-i\omega_m t) \} \quad (5)$$

再将自由面条件(1)式在平均自由面 $x_3 = 0$ 上作 Taylor 展开, 这样, 二阶入射和散射势 Φ_2^I 和 Φ_2^S 可表示如下:

$$\Phi_2^S(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \text{Re} \{ \phi_{nm}^+(\mathbf{x}, t) \exp(-i\Omega_{nm}^+ t) + \phi_{nm}^-(\mathbf{x}, t) \exp(-i\Omega_{nm}^- t) \} \quad (6)$$

$$\Phi_2^I(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \text{Re} \{ \varphi_{nm}^+(\mathbf{x}, t) \exp(-i\Omega_{nm}^+ t) + \varphi_{nm}^-(\mathbf{x}, t) \exp(-i\Omega_{nm}^- t) \} \quad (7)$$

这里, $\Omega_{nm}^{\pm} = \omega_n \pm \omega_m$, φ_{nm}^+ 和 φ_{nm}^- 分别为二阶和频与差频入射势, ϕ_{nm}^+ 和 ϕ_{nm}^- 分别为二阶和频与差频散射势. ϕ_{nm}^+ 和 ϕ_{nm}^- 满足 Laplace 方程与定解条件:

$$\partial_3 \phi_{nm}^{\pm} + \frac{1}{g} (\partial_t - i\Omega_{nm}^{\pm})^2 \phi_{nm}^{\pm} = P_{nm}^{\pm}(\mathbf{x}, t) + Q_{nm}^{\pm}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } x_3 = 0 \quad (8)$$

$$\partial_3 \phi_{nm}^{\pm} = 0, \text{ on } x_3 = -H; \mathbf{n} \cdot \nabla (\phi_{nm}^{\pm} + \varphi_{nm}^{\pm}) = 0, \text{ on } \mathbf{x} \in S_b; \nabla \phi_{nm}^{\pm} \rightarrow 0, \text{ as } r \rightarrow \infty \quad (9)$$

$$\phi_{nm}^{\pm}(\mathbf{x}, 0) = 0, \partial_t \phi_{nm}^{\pm}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{on } x_3 = 0 \quad (10)$$

式中, 二阶自由面条件中的强迫项 $P_{nm}^{\pm}$ 和 $Q_{nm}^{\pm}$ 是:

$$-2igP_{nm}^{\pm} = 2\Omega_{nm}^{\pm} \nabla \phi_n \nabla \varphi_m^{\pm} - \omega_n (k_m^2 - \nu_m^2) \phi_n \varphi_m^{\pm} \mp \omega_m \varphi_m^{\pm} (\partial_3^2 - \nu_n \partial_3) \phi_n + \Omega_{nm}^{\pm} \nabla \phi_n \cdot \nabla \phi_m^{\pm} - \omega_n \phi_n (\partial_3^2 - \nu_m \partial_3) \phi_m^{\pm} \quad (11)$$

$$-2gQ_{nm}^{\pm} = \partial_t [\nabla \phi_n \cdot \nabla \phi_m^{\pm} + 2 \nabla \phi_n \nabla \varphi_m^{\pm} - \phi_n (k_m^2 - \nu_m^2) \varphi_m^{\pm}] - \partial_t \phi_n (\partial_3 - \nu_m + d_m^{\pm}) \partial_3 \phi_m^{\pm} - \omega_n \phi_n d_m^{\pm} \partial_3 \phi_m^{\pm} \mp \omega_m \varphi_m^{\pm} d_n^{\pm} \partial_3 \phi_n \quad (12)$$

其中, $\nu_m = \omega_m^2/g$, $d_m^{\pm} = (\partial_t^2 \mp 2i\omega_m \partial_t)/g$, $\varphi_m^+ \equiv \varphi_m \equiv (\varphi_m^-)^*$, $\phi_m^- \equiv \phi_m \equiv (\phi_m^+)^*$.

星号“*”表示函数共轭. 而一阶散射势 ϕ_m 满足 Laplace 方程、初始条件(10), 及下述自由面、海底、物面和无限远边界条件:

$$(g\partial_3 + \partial_t^2 - 2i\omega_m\partial_t - \omega_m^2)\phi_m(x, t) = 0, \quad \text{on } x_3 = 0 \quad (13)$$

$$\partial_3\phi_m = 0, \text{ on } x_3 = -H; n \cdot \nabla(\phi_m + \varphi_m) = 0, \text{ on } x \in S_B; \nabla\phi_m \rightarrow 0, \text{ as } r \rightarrow \infty \quad (14)$$

上述势函数 $\phi_m^\pm$ 和 ϕ_m 和时间 t 有关. 若仅对问题的稳态解感兴趣, 可将其化作边值问题来处理. 事实上, 如同研究二阶 Stokes 波浪绕射问题一样^[3], 利用 Tauber 定理, 可以证明: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\phi_m^\pm$ 和 ϕ_m 的稳态解与势函数 $\Psi_m^\pm$ 和 Ψ_m 有关, 其关系是:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \Psi_m(x, \mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_m(x, t); \quad \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \Psi_m^\pm(x, \mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_m^\pm(x, t) \quad (15)$$

这里, μ 为 Laplace 变换参数, $\Psi_m^\pm(x, \mu)/\mu$ 和 $\Psi_m(x, \mu)/\mu$ 分别是 $\phi_m^\pm$ 和 ϕ_m 的 Laplace 变换函数. Ψ_m 由 Laplace 方程, 海底、物面和无限远边界条件(14) 及齐次自由面条件

$$(\partial_3 - i\mu - \nu_m)\Psi_m = 0, \quad \text{on } x_3 = 0 \quad (16)$$

决定, $\Psi_m^\pm$ 则满足 Laplace 方程, 海底、物面和无限远边界条件(9) 及非齐次自由面条件

$$(\partial_3 - \nu_m^\pm)\Psi_m^\pm = \Gamma_m^\pm + \gamma_m^\pm \quad \text{on } x_3 = 0 \quad (17)$$

其中, $g\nu_m^\pm = \Omega_m^{\pm 2} - i\Omega_m^\pm\mu$, $\gamma_m^\pm$ 仅和 Ψ_n 和 ϕ_n 有关, 且当 $\mu \rightarrow 0^+$ 时, 趋于零, 对二阶稳态解无贡献, 在研究二阶稳态解时, 可将其从式(17) 中略去. 而

$$\begin{aligned} -2ig\Gamma_m^\pm(x, \mu) &= 2\Omega_m^\pm \nabla \Psi_n \cdot \nabla \varphi_m^\pm - \omega_n(k_m^2 - \nu_m^2)\Psi_n \varphi_m^\pm \mp \\ \omega_m \varphi_m^\pm (\partial_3^2 - \nu_n^2) \partial \Psi_n + \Omega_m^\pm \nabla \Psi_n \cdot \nabla \Psi_m^\pm - \omega_n \Psi_n (\partial_3^2 - \nu_n^2) \Psi_m^\pm \end{aligned} \quad (18)$$

易知, 若取 $m = n = 1$, 则 Ψ_m 和 $\Psi_m^\pm$ 为均匀 Stokes 波浪绕射问题的一阶和二阶散射势的稳态解^[3]. 此外, 上述关于二阶波浪绕射势稳态解 $\Psi_m^\pm$ 边值问题的提法与采用阻尼系数法所导出的稳态解边值问题的提法完全一致^[4].

3 结果及其讨论

我们知道, 对线性问题, 辐射条件可用 Sommerfeld 条件表达, 但对二阶问题而言, 不仅存在其传播与一阶波无关的自由波, 且存在与一阶波系紧密相连的锁相波^[5,6]. 在以往关于二阶波浪绕射问题的研究中, 人们常将波浪绕射视为稳态作为研究的出发点, 为完全求解稳态波浪绕射问题, 需用到“辐射条件”^[1], 即须外加辐射条件以决定扰动波的传播行为. 因为二阶绕射势自由面条件中非齐次项在远方是缓慢衰减的, 不能视其为局部扰动, 这样, 二阶问题的辐射条件与 Sommerfeld 条件不同. 而如何给出二阶辐射条件这一问题, 使得研究者们不仅面临数学上的困难, 且需预先对该问题的物理过程有清晰的理解, 这使得二阶波浪绕射问题的辐射条件成为人们长期以来争论中心. 众所周知, 在牛顿力学的体系中, 物体的运动过程取决于其初始状态. 基于此, 为避开辐射条件这一问题, 从某一恰当的对初边值问题出发并寻求其稳态解, 应是建立二阶稳态波浪绕射边值问题的一条有效途径. 事实上, 本文通过将正弦扰动势视为相应初边值问题的稳态解, 在关于二阶 Stokes 波浪绕射问题的研究基础上, 给出了多色波场中二阶波浪绕射稳态解边值问题的一种提法.

本文关于二阶波浪绕射势的稳态解边值问题的提法隐含着辐射条件, 它由自由面条件(17) 中的 Laplace 变换参数 μ 所体现. 正是参数 μ 规定了辐射波的远方传播模式, 保证了了解的唯一性^[3,7]. 同时, 我们知道, 参数 μ 是对所研究初值问题关于时间变量 t 作 Laplace 变换后引入的参数, 故可认为, 它表征了水波在传播过程中的时间记忆效应, 可

视为辐射条件产生的根源之一. 另一方面, 由于采用本文所述的方法与采用阻尼系数法^[4]所导出的稳态解边值问题的提法相一致, 这表明参数 μ 类似于阻尼系数, 也就是说, 参数 μ 可以体现水波在粘性流体中的衰减特性.

参考文献:

- [1] MEI C C. *The applied dynamics of ocean surface waves*. New York: Wiley-Interscienc, 1983. 657 ~ 665.
- [2] STOKER J J. *Waterwaves*. New York: Interscienc, 1957. 174 ~ 181.
- [3] WU J, et al. A second order stationary solution of the three-dimensional wave diffraction potential. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 7 (1): 1 ~ 11.
- [4] SCLAVOUNOS P D. Radiation and diffraction of second order surface waves by floating bodies. *JFM*, 1988, 196: 65 ~ 91.
- [5] MOLIN B. Second order frequency loads and motions for 3D bodies. In: *Proc Intl workshop on water waves and bodies Floation*, Deps. of Ocean Engng. MIT, Rep, 886-2, 1986.
- [6] MOLIN B. Second order wave diffraction loads upon three dimensional bodies. *Appl Ocean Res*, 1979 (1): 197 ~ 202.
- [7] WU J, CHEN Y. A remark on the radiation conditions. *J of Hydrodynamics, Ser B*, 1991 (4): 1 ~ 11.

On the Boundary Value Problem of the Second Order Stationary Wave Diffraction Potential

FANG Ying^{*}, WU Jian-hua

Abstract: For the second order wave diffraction by three-dimensional bodies of arbitrary shape in finite water depth, the sinusoidal disturbance potential is considered as a stationary solution of an appropriate initial value problem. By employing straightforward perturbation analysis with the wave steepness as a small parameter, the initial value problems of the leading and the second order scattering potential are derived. Then, the boundary value problems, involving a damping which ensures their solutions satisfy proper far-field radiation conditions, of the leading and the second order stationary scattering potential are formulated by using of Laplace transformation method and Tauberian theorem.

Keywords: nonlinear water waves; wave loads; wave diffraction and scattering

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China