

文章编号: 0529-6579 (2000) S2-0013-05

求解双线性方程的带可解标记的三角化算法*

张 磊

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要: 在孤立子理论的双线性方法中产生的方程组进行形式变换, 定义其为双线性方程, 并通过寻求其特殊规律设计了求解的带可解标记的三角化算法, 在应用中取得了很好的效果.

关键词: 孤立子解; 双线性形式; 双线性方程; 标识矩阵/向量; 三角化算法

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A

1 双线性方程的产生及一般形式

孤立子^[1]在物理中的背景是孤立波, 与普通的相碰撞后能量相叠加的波不同的是, 孤立波在相互作用后波形与波速不变. 孤立子理论在物理、流体力学、激光、气象等领域里都得到广泛应用. 双线性方程源于求孤立子解的双线性方法^[2], 该方法的原理是将一个非线性发展方程^[3]通过变量代换转化为双线性形式, 即一种包含双线性算子的形式, 若一个非线性发展方程能转化为双线性形式, 就可能存在孤立子解. 但孤立子解的形式是怎样呢? 这往往要通过求解大量乃至成千上万的特殊方程求得.

双线性算子是一种特殊的求导运算, 其定义如下:

$$D_x^n D_t^m f(x, t) \cdot g(x, t) = (D_x - D_{x1})^n (D_t - D_{t1})^m f(x, t) g(x_1, t_1) |_{x_1=x, t_1=t} \quad (1)$$

例如, KDV 方程: $U_t - a(U_{xxx} + 6UU_x) = 2b\phi\phi_x$ 经变换 $U = 2(\log f)_x$, $\phi = g/f$ 后得到:

$$(D_x D_t - aD_x^4) f \cdot f = bg^2 \quad (2)$$

能转化为双线性形式, 说明了其孤立子解的存在性. 若解中有 N 个独立的孤立波, 则称该解为 N -孤子解, N 为正整数. N -孤子解的常见形式为指数形式, 对(2), 其指数形式解为:

$$f = \sum a_{i_1 \dots i_n} \exp(i_1 \eta_1 + \dots + i_n \eta_n) \quad i_1 + \dots + i_n = \text{偶} \quad (3)$$

$$g = \sum b_{j_1 \dots j_n} \exp(j_1 \eta_1 + \dots + j_n \eta_n) \quad j_1 + \dots + j_n = \text{奇} \quad (4)$$

其中, $i_k, j_k = 0, 1, 2$; $\eta_k = p_k x + q_k t + m_k$, p_k, q_k, m_k 为任意常数 ($k = 1, \dots, n$) $a_{i_1 \dots i_n}, b_{j_1 \dots j_n}$ 为待定系数, 若能解出这些系数, 就找到了 N -孤子解的显式表达式.

将解的指数形式代入双线性形式, 令方程两边相同指数项的系数相等, 便产生双线性方程, 所有的双线性方程构成双线性方程组. 对不同的系统, 产生的双线性方程的形式千差万

* 收稿日期: 2000-10-26; 作者简介: 张 磊 (1964~), 女, 讲师.

别,本文为了得到求解的统一算法,对其进行了形式化处理,使得不同系统对应的双线性方程组有统一的形式,形式化过程如下:

不妨令 $N = 2$, 将(3),(4)代入(2)中得:

$$\begin{aligned} (D_x D_t - a D_x^4) f \cdot f &= (D_x D_t - a D_x^4) \left(\sum a_{ij} \exp(i\eta_1 + j\eta_2) \cdot \sum a_{st} \exp(s\eta_1 + t\eta_2) \right) = \\ &= \sum a_{ij} a_{st} (D_x D_t - a D_x^4) \exp(i\eta_1 + j\eta_2) \cdot \exp(s\eta_1 + t\eta_2) = \\ &= \sum a_{ij} a_{st} D(i, j, s, t) \exp(i\eta_1 + j\eta_2) \exp(s\eta_1 + t\eta_2) = \\ &= \sum a_{ij} a_{st} D(i, j, s, t) \exp((i+s)\eta_1 + (j+t)\eta_2) \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$D(i, j, s, t) = \frac{(D_x D_t - a D_x^4) \exp(i\eta_1 + j\eta_2) \cdot \exp(s\eta_1 + t\eta_2)}{\exp((i+s)\eta_1 + (j+t)\eta_2)} \quad (6)$$

对(6)式,我们可以证明其具有如下两个性质:

性质1 (6)式不含 $\exp$ 项.事实上,由于对 $\exp(f(x, t))$ 求导后仍保留 $\exp(f(x, t))$ 项 ($f(x, t)$ 为任意函数), (6)式中分子分母可同时消掉 $\exp(i\eta_1 + j\eta_2) \exp(s\eta_1 + t\eta_2)$.

性质2 (6)式仅与 i, j, s, t 有关.这是由于 η_1, η_2 为 x, t 的线性函数.因为由(2)式右边得:

$$bg^2 = \sum b_{kl} b_{pq} \exp((k+p)\eta_1 + (l+q)\eta_2) \quad (7)$$

令(5)和(7)式中有相同指数的 $\exp$ 的系数相等得双线性方程的表达式:

$$\sum a_{ij} a_{st} D(i, j, s, t) = b \sum b_{kl} b_{pq} \quad (8)$$

对(5)~(8)式,有约束条件: $i, j, s, t, k, l, p, q = 0, 1, 2$; $i+j, s+t = \text{偶}$; $k+l, p+q = \text{奇}$ 以及指数相等条件: $i+s = k+p$; $j+t = l+q$. 例如:

$$\text{由 } \exp(\eta_1 + \eta_2) \text{ 项得: } D(0, 0, 1, 1) a_{00} a_{11} + D(1, 1, 0, 0) a_{11} a_{00} = 2b_{01} b_{10} \quad (9)$$

$$\text{由 } \exp(\eta_1 + 3\eta_2) \text{ 项得: } D(0, 2, 1, 1) a_{02} a_{11} + D(1, 1, 0, 2) a_{11} a_{02} = 2b_{01} b_{12} \quad (10)$$

$$\text{由 } \exp(4\eta_1 + 2\eta_2) \text{ 项得: } D(2, 0, 2, 2) a_{20} a_{22} + D(2, 2, 2, 0) a_{22} a_{20} = 2b_{12} b_{21} \quad (11)$$

2 双线性方程组的矩阵表达形式及方程组特点

由(8)式可看出:双线性方程中的含变元的项($a_{ij} a_{st}$)的系数正好是其中的各参量的下标的函数,这个特性虽然是在 $N = 2$ 时推导出来的,但对任意的 N 都成立,因此,在下面的讨论中都以 $N = 2$ 作为实例.为了与普通的线性方程区别,不妨引进运算符 $\cdot\cdot$, 记

$$a_{ij} a_{st} D(i, j, s, t) \cong a_{ij} \cdot\cdot a_{st} \quad (12)$$

这样,双线性方程可以写成如下标准形式:

$$\sum a_{ij} \cdot\cdot a_{st} = b \sum b_{kl} b_{pq} \quad (13)$$

其中, i, j, s, t, k, l, p, q 的范围和约束同前.

令 $A = [a_{00}, \dots, a_{22}]$, 即所有 $\{a_{ij}, i, j = 0, 1, 2, i+j = \text{偶}\}$ 组成的 M 个元素的向量;
令 $B = [b_{10}, \dots, b_{21}]$, 即所有 $\{b_{ij}, i, j = 0, 1, 2, i+j = \text{奇}\}$ 组成的 N 个元素的向量, M, N 为正整数.这样,双线性方程组(即所有的双线性方程的序列)可写成如下矩阵形式:

$$A \cdot\cdot CA = bB \cdot CB \quad (14)$$

其中, CA 和 CB 为矩阵.设 $CA = [A^{(1)}, \dots, A^{(R)}]$; $CB = [B^{(1)}, \dots, B^{(R)}]$; R 为方程个数; $A^{(r)}$

是与 A^T 同维的列向量($I = 1, \dots, R$); $B^{(J)}$ 是与 B^T 同维的列向量($J = 1, \dots, R$). 于是, 第 I 个方程($I = 1, \dots, R$)可表示为:

$$A \cdot CA^{(I)} = bB * CB^{(I)} \quad (15)$$

例如, $N = 2$ 时的各向量的取值为:

$$A = [a00, a02, a11, a20, a22]; B = [b01, b10, b12, b21]$$

在下表中, A_i 对应 $A^{(i)}$, B_i 对应 $B^{(i)}$, $i = 1, \dots, 10$, 表中各项目只列出下标, 即 $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ 栏中各项目分别省略了开头的字母 a 和 b ; 空项目对应不存在的项.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
02	11	20	22							01	10		21			12			
00			20	22		11					01	10	12		21				
	00		11		20	02	22						10	12		01	21		
		00	02		11			20	22				01		10		12		21
			00	02			11		20										

双线性方程组不同于线性方程组, 不能采用线性方程组的解法; 但它也不同于非线性方程组, 非线性方程组没有统一解法, 而本文在总结双线性方程组的特点后, 找到了求解它的通用的有效算法. 双线性方程组的特点总结如下:

特点1 在求 N - 孤子解时, 将待定参数中的 N 个作为自由参数, 无需对它们求解. 一般地, 将 $b_{j_1 \dots j_n} | j_1 + \dots + j_n = 1$ 定为自由参数, 如: $N = 3$ 时, $b_{100}, b_{010}, b_{001}$ 为自由参数.

特点2 当某方程只有一个未知数时, 称其为可解的, 否则称其为不可解的. 但不可解性是暂时的, 当解出一些方程后, 就会使另一些方程变成可解的. 例如, 方程(9) 解出 a_{11} 后, 使原来不可解的方程(10) 变成可解的了. 实际上, 只要按一定次序求解方程, 所有方程最终都变得可解. 寻求求解次序, 正是本文要解决的重点问题.

特点3 方程组中各方程的次序具有随机性. 本文所描述的算法适用于方程的随机排列.

特点4 随着 N 的增大, 方程的数量呈指数级增加. 如: $N = 3$ 时, 有近 80 个方程; $N = 5$ 时却有近 2 000 个方程. 可见, 靠手工求解几乎是不可能的.

特点5 方程个数远大于参数个数, 也就是说, 有大量冗余方程. 例如, $N = 3$ 时, 只有 23 个待定参数, 而有近 80 个方程. 求解时, 在挑选出 23 个方程求得 23 个参数后, 还要验证其它的冗余方程恒成立.

3 带标记的带可解标记的三角化算法

由以上特点 4, 寻求解双线性方程组的计算机算法很有必要. 由特点 2 和 3, 依次确定下一个可解方程时没有能用公式确定的求解次序, 因此, 本文借用了人工智能学中的搜索求解法, 通过特设的标记数据, 解决了可解性的测试问题, 并用公式描述了解的形式.

定义1 对一个双线性方程, 如果其右边没有未知数而左边只有一个未知数, 则称其为左可解的; 如果其左边没有未知数而右边只有一个未知数, 则称其为右可解的.

引理1 一个双线性方程为可解的, 当且仅当其为左可解的或右可解的.

为了测试一个方程的可解性, 本文在双线性方程组的矩阵表达式(14) 的基础上引进了

如下标识矩阵/向量: FA, FB, FCA, FCB . 它们分别是与 A, B, CA, CB 同维的向量/矩阵; FA, FB, FCA, FCB 中的元素取值为0或1. $FA/FB/FCA/FCB$ 的某元素取值为0时将分别表示 $A/B/CA/CB$ 对应位置上的元素还未求解;反之,取值为1则表示对应元素已被求解. 因此, $FA/FB/FCA/FCB$ 分别称为 $A/B/CA/CB$ 的标记向量/矩阵.

引理2 通过标识向量/矩阵,可以测试双线性方程的可解性.

不妨设某个方程(例如第 K 个方程, $K = 1 \cdots R$) 为:

$$\sum_{i=1 \cdots M} A(i) \cdots CA(i, k) = b \sum_{j=1 \cdots N} B(j) * CB(j, k) \quad (16)$$

设 $i_1, \dots, i_s$ 为 $CA(1, k), \dots, CA(M, k)$ 中不为0的元素的下标; $j_1, \dots, j_t$ 为 $CB(1, k), \dots, CB(N, k)$ 中不为0的元素的下标. 则方程(16)等价于:

$$\sum_{i=1 \cdots s} A(i_l) \cdots CA(i_l, k) = b \sum_{j=1 \cdots t} B(j_l) * CB(j_l, k)$$

引理3 方程(16)为左可解的,若下述条件均满足:

- (1) $FA(i_1), \dots, FA(i_s)$ 中只有一个为0,不妨设为 $FA(i_p)$
- (2) $FCA(i_1, k), \dots, FCA(i_s, k)$ 中只有一个为0,不妨设为 $FCA(i_q, k)$
- (3) $A(i_p) = CA(i_q, k)$, 这就是方程左边唯一的待求参数
- (4) $FB(j_1), \dots, FB(j_t)$ 和 $FCB(j_1, k), \dots, FCB(j_t, k)$ 都不为0(方程右边无未知数).

引理4 方程(16)为右可解的,若下述条件均满足:

- (1) $FA(i_1), \dots, FA(i_s)$ 和 $FCA(i_1, k), \dots, FCA(i_s, k)$ 都不为0(方程左边无未知数).
- (2) $FB(j_1), \dots, FB(j_t)$ 中只有一个为0,不妨设为 $FB(j_p)$
- (3) $FCB(j_1, k), \dots, FCB(j_t, k)$ 中只有一个为0,不妨设为 $FCBK(j_q, k)$
- (4) $B(j_p) = CB(j_q, k)$, 这就是方程右边唯一的待求参数

下面将列出左可解方程的解的表达式:设其左边含未知数的项为 $A(i_p) \cdots CA(i_p, k)$ 和 $A(i_q) \cdots CA(i_q, k)$;待求项为 $AK(i_p) = CA(i_q, k)$, 设其表示系数 a_{mn} ; 设 $CA(i_p, k) = a_{ef}$, $A(i_q) = a_{gh}$

引理5 若方程(16)为左可解的,则其解为

$$a_{mn} = \frac{- \sum_{l=1 \cdots s, i_l \neq i_p, i_q} A(i_l) \cdots CA(i_l, k) + b \sum_{l=1 \cdots t} B(j_l) * CB(j_l, k)}{D(m, n, e, f) CA(i_p, k) + D(g, h, m, n) A(i_q)} \quad (17)$$

下面将列出右可解方程的解的表达式:设其右边含未知数的项为 $B(j_p) * CB(j_p, k)$ 和 $B(j_q) * CB(j_q, k)$;待求项为 $B(j_p) = CB(j_q, k)$, 设其表示系数 b_{mn} ; 设 $CB(j_p, k) = b_{ef}$, $B(j_q) = b_{gh}$

引理6 若方程(16)为右可解的,则其解为

$$b_{mn} = \frac{\sum_{l=1 \cdots s} A(i_l) \cdots CA(i_l, k) - b \sum_{l=1 \cdots t, l \neq j_p, j_q} B(j_l) * CB(j_l, k)}{CB(j_p, k) + B(j_q)} \quad (18)$$

本文所设计的求解双线性方程组的方法是借助了人工智能学中的宽度搜索法,简单地讲,就是依次测试待解方程的可解性,测到一个可解方程时就:① 求解其中的唯一待求参数;② 做已求解标记——修改与该参数相关的标记矩阵/向量中的对应元素,即分别找出 $A/CA/B/CB$ 中取值为该参数的所有元素,将与它们位置相对应的 FA (与 A 对

解);③,将该方程移到所有待解方程的前面.算法结束时,方程组变成了三角形式.

详细步骤如下:

(1) 搜索左可解方程:依次根据引理3测试所有待求方程的左可解性,若为的左可解的,则:由引理5求出待解参数的解;做已求解标记;将该方程移到所有待解方程的前面.这个循环过程称作一轮左可解搜索.

(2) 搜索右可解方程:依次根据引理4测试所有待求方程的右可解性,若为的右可解的,则:由引理6求出待解参数的解;做已求解标记;将该方程移到所有待解方程的前面.这个循环过程称作一轮右可解搜索.

(3) 若在(1)中未能找到左可解方程且在(2)中未能找到右可解方程或者所有待解参数已求解,则退出,否则转(1).

参考文献:

- [1] 郭柏灵, 庞小峰. 孤立子. 北京: 科学出版社, 1987. 12~14.
- [2] HIROTA R, SATSUMA J. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de vries equation. Physics Letters, 1981. 19.
- [3] HIETARINTA J. A Search for bilinear equations passing hirota's three- Soliton condition. J Math Phys, 1987, 28 (8).

Triangularization Algorithm with Solvable Mark to Bilinear Equations

ZHANG Lei *

Abstract: A useful algorithm is obtained for solving bilinear equations. This algorithm was used successfully for searching soliton solutions of one to five solitons.

Keywords: soliton; bilinear form; bilinear equation; mark matrix; triangularization algorithm

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China