

# 基于 FUZZY 判断矩阵特征值的论征与估计\*

秦松喜

(新疆喀什师范学院数学系, 新疆 喀什 844000)

**摘 要:** 基于 AHP 法中模糊数学隶属度原理的引入并结合 G 型“迹占优”阵, 解决了模糊系统 FUZZY 判断矩阵难以建立的问题及其特征值估计问题.

**关键词:** 特征值; AHP 法; 迹占优阵

**中图分类号:** O151.21 **文献标识码:** A

本文考虑广泛存在的决策者的思维与客观实际等诸多 FUZZY 因素, 在传统的 AHP 法与“迹占优”矩阵理论的基点上, 解决模糊系统 FUZZY 判断矩阵的建立与最大(优)特征值的估计问题. 还对“迹占优”阵主要应用 G 型矩阵的方法给出特征值的估计式. 扩大 AHP 与迹占优阵法的 FUZZY 判断系统, 提高了特征值解法的简捷性.

## 1 迹占优阵与模糊阵的定义

**定义 1** 设  $A$  是  $n$  阶复方阵,  $a, b$  是任意两个非负实数, 如果存在满足  $a + b = 1$  的  $a$  与  $b$ , 使得具有如下式子  $G(A)$

$$G(A) = |\operatorname{tr}(aA + b\bar{A}')|^2 - (n-1)(\|aA + b\bar{A}'\|^2 - (a^2 + b^2)m) > 0 \quad (1)$$

则称  $A$  为  $G$  型迹占优阵.

式中  $A = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$ ,  $A_k$  是  $A$  的任一  $k$  阵顺序主子阵,  $1 \leq k \leq n-1$ , 记  $m = \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B_k\| - \|C_k\|)^2$ ,  $\operatorname{tr}(\cdot)$  表示矩阵  $(\cdot)$  的迹.

若记  $E(A) = |\operatorname{tr} A|^2 - (n-1)(\|A\|^2 - m)$  (2)

$$F(A) = |\operatorname{tr}((A + \bar{A}')/2)|^2 - (n-1)(\|(A + \bar{A}')/2\|^2 - m/2) \quad (3)$$

按文[1], 如果  $E(A) > 0$ , 则称  $A$  为  $E$  型迹占优阵; 如果  $F(A) > 0$ , 则称  $A$  为  $F$  型迹占优阵.

在  $G$  型与  $E$  型、 $F$  型间有如下主要比较结果. (1)  $E$  型、 $F$  型迹占优阵一定是  $G$  型迹占优阵. 但是反过来  $G$  型迹占优阵未必是  $E$  型、 $F$  型迹占优阵. 正如, 由 (1) 式知  $G(A) \xrightarrow{a=1, b=0} E(A)$ ;  $G(A) \xrightarrow{a=b=1/2} F(A)$ . 又如

\* 收稿日期: 2000-07-13; 作者简介: 秦松喜 (1957~), 男, 副教授.

$$A = \begin{bmatrix} 3+i & 2 & 0 \\ 0 & 4+2i & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{a=1/5, b=4/5} E(A) = -5 < 0 \text{ 不是 } E \text{ 型} \\ G(A) = 0.76 > 0 \text{ 是 } G \text{ 型. 再如}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1 & 0 \\ 0 & 3+2i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{a=1/20, b=19/20} F(A) = -4 < 0 \text{ 不是 } F \text{ 型} \\ G(A) = 0.05 > 0 \text{ 是 } G \text{ 型.}$$

(2) 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶复方阵, 那么

$$G(A) = -2(d - E(A))a^2 + 2(d - E(A))a + E(A) \quad (4)$$

式中,  $d = \operatorname{Re}^2(\operatorname{tr}A) - \operatorname{Im}^2(\operatorname{tr}A) - (n-1) \sum_{i,j=1}^n \operatorname{Re}(a_{ij}a_{ji})$ , 特别地

$$F(A) = (d + E(A))/2 \quad (5)$$

证明 已设  $A$  是  $n$  阶复方阵, 因为

$$|\operatorname{tr}(aA + b\bar{A}')|^2 = (a^2 + b^2) |\operatorname{tr}A|^2 + 2[\operatorname{Re}^2(\operatorname{tr}A) - \operatorname{Im}^2(\operatorname{tr}A)]ab \quad (6)$$

$$\|aA + b\bar{A}'\|^2 = \sum_{i,j=1}^n |aa_{ij} + ba_{ji}|^2 = (a^2 + b^2) \|A\|^2 + 2ab \sum_{i,j=1}^n \operatorname{Re}(a_{ij}a_{ji}) \quad (7)$$

所以, 由(6)式、(7)式及(1)式即得

$$G(A) = (a^2 + b^2)E(A) + 2dab = -2(d - E(A))a^2 + 2(d - E(A))a + E(A)$$

特别地, 取  $a = 1/2$  得:  $G(A) = F(A) = (d + E(A))/2$ . 证毕.

(3) 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶实方阵, 那么

$$G(A) = 2ga(1-a) + E(A) \quad (8)$$

其中,  $g = (n-1) \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2 - m \right]$ , 特别地

$$F(A) = g/2 + E(A) \quad (\text{取 } a = 1/2)$$

可类似上面的求证(略).

由上述可进一步对  $A$  是  $G$  型迹占优阵的充要条件, 分别作如下描述:

(1) 若  $A$  是  $n$  阶复方阵, 那么  $A$  是  $G$  型迹占优阵的充要条件是: 存在实数  $a \in [0, 1]$ , 使

$$[d - E(A)] \text{ 与 } \left[ a^2 - a - \frac{E(A)}{2(d - E(A))} \right] \text{ 为异号.}$$

(2) 若  $A$  是  $n$  阶实方阵, 那么  $A$  是  $G$  型迹占优阵的充要条件是:  $A$  为  $F$  型迹占优阵.

定义 2 模糊数  $b_{ij}^{(L)}(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, m; L = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n$ ) 表示对准则  $T_L$  ( $L = 1, 2, \dots, s$ ) 在  $n$  个方案  $B_1, B_2, \dots, B_n$  中, 第  $k$  个决策者给出方案  $B_i, B_j$  的相对重要性程度——即隶属度的判断.

且  $b_{ij}^{(L)}(k)$  的值的含义为: 相对准则  $T_L$  而言, 第  $k$  个决策者认为的隶属度.

当  $b_{ij}^{(L)}(k) < 0.5$  时, 表示  $B_i$  不如  $B_j$  重要, 其值越小, 表示  $B_i$  不如  $B_j$  重要的程度越大.

当  $b_{ij}^{(L)}(k) = 0$  时, 表示  $B_i$  与  $B_j$  同等重要. 当  $b_{ij}^{(L)}(k) > 0.5$  时, 表示  $B_i$  比  $B_j$  重要, 其值越大表示  $B_i$  比  $B_j$  重要的程度越大. 由  $b_{ij}^{(L)}(k)$  的值可确定决策者的判断赋值(表1).

## 2 模糊判断矩阵的建立

把模糊数学中的隶属度概念, 应用到诸多实际复杂的模糊性问题中, 较好地解决方案两两比较但存在着模糊性而难以决策的问题.

表 1 判断赋值表

| $T_L$    | $B_1$    | $B_2$             | $B_3$             | ... | $B_n$             |
|----------|----------|-------------------|-------------------|-----|-------------------|
|          | 0.5      | $b_{12}^{(L)}(1)$ | $b_{13}^{(L)}(1)$ | ... | $b_{1n}^{(L)}(1)$ |
| $B_1$    |          | $b_{12}^{(L)}(2)$ | $b_{13}^{(L)}(2)$ | ... | $b_{1n}^{(L)}(2)$ |
|          |          | $b_{12}^{(L)}(m)$ | $b_{13}^{(L)}(m)$ | ... | $b_{1n}^{(L)}(m)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | ...               | $\vdots$          | ... | $\vdots$          |
| $B_n$    |          |                   |                   |     | 0.5               |

根据隶属度和二元关系优先定序法<sup>[2]</sup>,  $b_{ij}^{(L)}(k)$  应满足约束条件

$$\begin{cases} b_{ij}^{(L)}(k) \in [0, 1] \\ b_{ij}^{(L)}(k) = 0.5 \\ b_{ij}^{(L)}(k) = b_{ji}^{(L)}(k) \end{cases} \begin{cases} i, j = 1, 2, \dots, n \\ L = 1, 2, \dots, s \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (9)$$

由决策者判断赋值表可计算出, 对准则  $T_L$  而言的  $B_i$  与  $B_j$  隶属度的决策者群体中心值

$$b_{ij}^{(L)} = \sum_{k=1}^m b_{ij}^{(L)}(k) / m \quad (10)$$

显然,  $b_{ij}^{(L)}$  满足约束条件(9)式, 即有

$$b_{ij}^{(L)} \in [0, 1], b_{ij}^{(L)} + b_{ji}^{(L)} = 1, b_{ij}^{(L)} = 0.5 (i, j = 1, 2, \dots, n; L = 1, 2, \dots, s)$$

由  $b_{ij}^{(L)}$  的值得相对于准则  $T_L$  而言的判断隶属度矩阵  $B^{(L)}$  为

$$B^{(L)} = \begin{pmatrix} 0.5 & b_{12}^{(L)} & \dots & b_{1n}^{(L)} \\ & 0.5 & \dots & b_{2n}^{(L)} \\ & & \ddots & \\ & & & 0.5 \end{pmatrix} = (b_{ij}^{(L)})_{n \times n} \quad (11)$$

$$\text{作变换 } C_{ij}^{(L)} = \begin{cases} 16 b_{ij}^{(L)} - 7, & \text{当 } b_{ij}^{(L)} \geq 0.5 \\ [16 b_{ji}^{(L)} - 7]^{-1}, & \text{当 } b_{ij}^{(L)} < 0.5 \end{cases} \quad (12)$$

则  $C_{ij}^{(L)}$  满足  $C_{ij}^{(L)} \in [1/q, q]$ ,  $C_{ij}^{(L)} = 1/C_{ji}^{(L)}$ ,  $C_{ii}^{(L)} = 1$

所以模糊判断矩阵——亦即为正互反矩阵为

$$C^L = \begin{pmatrix} 1 & C_{12}^{(L)} & C_{13}^{(L)} & \dots & C_{1n}^{(L)} \\ C_{21}^{(L)} & 1 & C_{23}^{(L)} & \dots & C_{2n}^{(L)} \\ C_{31}^{(L)} & C_{32}^{(L)} & 1 & \dots & C_{3n}^{(L)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}^{(L)} & C_{n2}^{(L)} & C_{n3}^{(L)} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

### 3 特征值的论证与计算

#### 3.1 G型“迹占优”阵的特征值估计

定理 1 设  $A = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$  是  $n$  阶复方阵,  $A_k$  是  $A$  的  $k$  阶顺序主子阵,  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$\lambda$  是  $A$  的任一特征值, 则成立不等式

$$n |a\lambda + b\bar{\lambda}'|^2 - 2[\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) + (a-b)^2\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\operatorname{tr}A) + G(A)] \leq 0$$

证明 设  $\lambda$  是任一复数, 因为特征矩阵  $\lambda I_n - A$  为

$$\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda I_k - A_k & -B_k \\ -C_k & \lambda I_{n-k} - D_k \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\text{所以 } G(\lambda I_n - A) = |\operatorname{tr}[a(\lambda I_n - A) + b(\overline{\lambda I_n - A})]|^2 - (n-1) \{ \|a(\lambda I_n - A) + b(\overline{\lambda I_n - A})\|^2 - (a^2 + b^2) \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B_k\| - \|C_k\|)^2 \} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{但是 } |\operatorname{tr}[a(\lambda I_n - A) + b(\overline{\lambda I_n - A})]|^2 &= |n(a\lambda + b\bar{\lambda}) - \operatorname{tr}(aA + b\bar{A}')|^2 = \\ &= n^2 |a\lambda + b\bar{\lambda}|^2 - 2n[\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) + (a-b)^2\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\operatorname{tr}A)] \\ &+ |\operatorname{tr}(aA + b\bar{A}')|^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \|a(\lambda I_n - A) + b(\overline{\lambda I_n - A})\|^2 &= \|(aA + b\bar{\lambda})I_n - (aA + b\bar{A}')\|^2 = \\ &= n |a\lambda + b\bar{\lambda}|^2 + \|aA + b\bar{A}'\|^2 - 2[\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) + (a-b)^2 \cdot \\ &\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\operatorname{tr}A)] \end{aligned} \quad (18)$$

由(16)式、(17)式及(18)式即得

$$G(\lambda I_n - A) = n |a\lambda + b\bar{\lambda}|^2 - 2[\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) + (a-b)^2\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\operatorname{tr}A)] + G(A) \quad (19)$$

若  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则  $\lambda I_n - A$  应是奇异阵, 应有  $G(\lambda I_n - A) \leq 0$ , 由(19)式可得  $n |a\lambda + b\bar{\lambda}|^2 - 2[\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) + (a-b)^2\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\operatorname{tr}A)] + G(A) \leq 0$ , 证毕.

**推论 1** 设  $\lambda$  是  $n$  阶复方阵  $A$  的任意特征值, 则成立以下不等式

$$n\operatorname{Re}^2(\lambda) - 2[\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) + (a-b)^2\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\operatorname{tr}A)] + G(A) \leq 0 \quad (20)$$

**证明** 由  $|a\lambda + b\bar{\lambda}|^2 = \operatorname{Re}^2(\lambda) + (a-b)^2\operatorname{Im}(\lambda)$  与(19)式, 不难证得(20)式.

**推论 2** 设  $A$  是  $G$  型迹占优阵,  $\lambda$  是  $A$  的任何特征值, 则成立以下不等式

$$\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\operatorname{tr}A) + (a-b)^2\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\operatorname{tr}A) > 0 \quad (21)$$

**证明** 因  $A$  是  $G$  型迹占优阵, 故  $G(A) > 0$ , 由(19)式或(20)式好可证得(21)式.

**定理 2** 设  $A$  是  $G$  型迹占优实方阵,  $\lambda$  是  $A$  的任一特征值, 那么

①  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0 (< 0)$  的充要条件是  $\operatorname{tr}A > 0 (< 0)$ ;

② 令  $\theta_0 = |\operatorname{tr}A|^2/n^2 - G(A)/n$ . 当  $\theta_0 > 0$  时,

$$\frac{\operatorname{tr}A}{n} - \sqrt{\theta_0} \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq \frac{\operatorname{tr}A}{n} + \sqrt{\theta_0} \quad (22)$$

当  $\theta_0 = 0$  时,  $\operatorname{Re}(\lambda) < \operatorname{tr}A/n$

③ 当  $\operatorname{tr}A > 0$  时,  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \frac{G(A)}{2\operatorname{tr}A}$ ; 当  $\operatorname{tr}A < 0$  时,  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq -\frac{G(A)}{2|\operatorname{tr}A|}$

**证明** 因  $A$  是实方阵,  $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}A) = 0$ .

① 由(21)式知, 充要条件成立.

② 由(20)式得  $\operatorname{Re}^2(\lambda) - \frac{2\operatorname{tr}A}{n}\operatorname{Re}(\lambda) + \frac{G(A)}{n} \leq 0$ , 即

$$(\operatorname{Re}(\lambda) - \frac{\operatorname{tr}A}{n})^2 \leq \frac{|\operatorname{tr}A|^2}{n^2} - \frac{G(A)}{n} = \theta_0 \quad (23)$$

故  $\theta_0 \geq 0$ , 可由(23)式即得到(2)中有关结论.

③ 由(20)式得  $-2\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{tr}A + G(A) \leq 0$ , 又因  $A$  是  $G$  型迹占优阵, 故  $A$  非奇异, 于是  $\lambda \neq 0$ , 所以, 当  $\operatorname{tr}A > 0$  时,  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \frac{G(A)}{2\operatorname{tr}A}$ ; 当  $\operatorname{tr}A < 0$  时,  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq -\frac{G(A)}{2|\operatorname{tr}A|}$ . 证毕.

定理 3 设  $A$  是  $n$  阶  $G$  型迹占优复方阵, 若  $A$  有实特征值  $\lambda$ , 那么

①  $\lambda > 0$  的充要条件是  $\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A) > 0$ ;  $\lambda < 0$  的充要条件是  $\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A) < 0$ .

② 令  $\theta = \frac{\operatorname{Re}^2(\operatorname{tr} A)}{n^2} - \frac{G(A)}{n}$ . 当  $\theta > 0$  时,  $\lambda \leq \frac{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A)}{n} + \sqrt{\theta}$ ; 当  $\theta = 0$  时,  $\lambda = \frac{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A)}{n}$ .

③ 当  $\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A) > 0$  时,  $\lambda \geq \frac{G(A)}{2\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A)}$ ; 当  $\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A) < 0$  时,  $\lambda \leq \frac{G(A)}{2|\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A)|}$ .

### 3.2 判断矩阵的最大特征值

设决策者对目标的权向量为

$$V^2 = (0.2, 0.3, 0.3, 0.2)^T$$

4 个决策者相对  $T_L$  而言 ( $L = 1, 2, 3, 4$ ) 对方案  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 两两比较相对优的隶属度的判断赋值 (表 2).

表 2 相对优的隶属度的判断赋值表

| $T_1$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $T_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $T_3$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $T_4$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 0.5   | 0.4   | 0.2   |       | 0.5   | 0.9   | 0.5   |       | 0.5   | 0.8   | 0.6   |       | 0.5   | 0.8   | 0.8   |
| $B_1$ |       | 0.3   | 0.1   | $B_1$ |       | 1.0   | 0.45  | $B_1$ |       | 0.7   | 0.7   | $B_1$ |       | 0.9   | 0.7   |
|       |       | 0.2   | 0.4   |       |       | 0.8   | 0.6   |       |       | 0.6   | 0.5   |       |       | 0.85  | 0.75  |
|       |       | 0.5   | 0.35  |       |       | 0.6   | 0.7   |       |       | 0.6   | 0.65  |       |       | 0.86  | 0.85  |
| $B_2$ |       | 0.5   | 0.4   | $B_2$ |       | 0.5   | 0.3   | $B_2$ |       | 0.5   | 0.3   | $B_2$ |       | 0.5   | 0.5   |
|       |       |       | 0.3   |       |       |       | 0.6   |       |       |       | 0.35  |       |       |       | 0.4   |
|       |       |       | 0.4   |       |       |       | 0.4   |       |       |       | 0.45  |       |       |       | 0.45  |
|       |       |       | 0.45  |       |       |       | 0.35  |       |       |       | 0.5   |       |       | 0.55  |       |
| $B_3$ |       |       | 0.5   | $B_3$ |       |       | 0.5   | $B_3$ |       |       | 0.5   | $B_3$ |       |       | 0.5   |

按上表由 (10) 式分别计算出决策者群体中心值  $b_{ij}^{(L)}$ , 再分别得判断隶属度矩阵为:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.26 \\ 0.65 & 0.5 & 0.39 \\ 0.74 & 0.61 & 0.5 \end{pmatrix}, B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.83 & 0.56 \\ 0.17 & 0.5 & 0.41 \\ 0.44 & 0.59 & 0.5 \end{pmatrix}, B^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.68 & 0.61 \\ 0.32 & 0.5 & 0.4 \\ 0.39 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$B^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.85 & 0.78 \\ 0.15 & 0.5 & 0.48 \\ 0.22 & 0.52 & 0.5 \end{pmatrix}$$

由 (12) 式与 (13) 式的变换得模糊判断矩阵为:

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0.29 & 0.2 \\ 3.4 & 1 & 0.36 \\ 5 & 2.76 & 1 \end{pmatrix}, C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 6.25 & 1.96 \\ 0.15 & 1 & 1.8 \\ 0.18 & 0.56 & 1 \end{pmatrix}, C^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3.88 & 2.76 \\ 0.26 & 1 & 3.4 \\ 0.36 & 0.29 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 6.6 & 5.48 \\ 0.15 & 1 & 0.76 \\ 0.18 & 1.32 & 1 \end{pmatrix}$$

分别求出  $C^{(L)}$  的最大特征值与特征向量分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3.05 \\ \lambda_2 = 3.003 \\ \lambda_3 = 3.04 \\ \lambda_4 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = (0.1, 0.28, 0.62)^T \\ V_2 = (0.61, 0.11, 0.28)^T \\ V_3 = (0.6, 0.13, 0.27)^T \\ V_4 = (0.75, 0.11, 0.14)^T \end{cases}$$

### 3.3 方案按优排序<sup>[3,4]</sup>

① 一致性检验为:  $CI_1 = 0.025$ ,  $CR_1 = 0.04 < 0.1$ ;  $CI_2 = 0.02$ ,  $CR_2 = 0.03 < 0.1$ ;  $CI_3 = 0.02$ ,  $CR_3 = 0.03 < 0.1$ ;  $CI_4 = 0$ ,  $CR_4 = 0 < 0.1$ . 全部通过.

② 计算组合权重

方案  $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$  对决策目标的组织权重为

$$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) \cdot V^{(2)} = (0.53, 0.14, 0.33)^T$$

所以, 3 个方案的优排序为  $B_1 > B_3 > B_2$ , 最优方案为第一个方案  $B_1$ .

## 4 简单小结

本文讨论的 FUZZY (模糊) 判断矩阵的给出方法, 考虑了模糊的广泛性, 即既考虑客观存在的模糊性, 又考虑决策者思维的模糊性, 拓广了现时的 AHP 法的应用范围.

实际存在的诸多 FUZZY 因素, 导致方案两两比较判断赋值以刻划两者相对重要性的难度, 推广模糊数学中的隶属度概念, 较之 AHP 法容易建立 FUZZY 判断矩阵. 应用也方便简捷.

文中按两两比较相对优的隶属度来确定判断矩阵的最大特征值, 达到方案评优的目的; 同时还探讨了 G 型迹占优方阵的特征值估计, 即从另一个角度对给出方阵形式的 FUZZY 矩阵, 还可给出它的特征值分布与估计.

### 参考文献:

- [1] 屠伯坝. 两类迹占优阵的特征值的分布与估计. 数学杂志, 1988, 8 (1): 67~74.
- [2] 左军. 层次分析法中判断矩阵的间接给出法. 系统工程. 1988, 6 (6): 56~63.
- [3] 卢宗华. 层次分析法中判断矩阵构造方法的改进. 系统工程, 1990, 8 (1): 43~44.
- [4] 赵焕臣. 层次分析法. 北京: 科学出版社, 1986. 13~38.

## Demonstration of Eigenvalues and the Estimation due to FUZZY Judgement Matrix

QIN Song-xi \*

**Abstract:** The principle of membership degree in fuzzy mathematics is introduced in the method of AHP. And integrated trace dominant matrix of G type with it settled that the difficult problems are built to fuzzy judgement matrix in the fuzzy system and the estimation of eigenvalues.

**Keywords:** eigenvalue; method of AHP; trace dominant matrix

\* Department of Mathematics, Kashgar Teachers College, Kashgar, Xinjiang 844000, China