

文章编号: 0529-6579 (2000) 03-0116-03

非可分空间上计数测度的 Hun 半群结构^{*}

宋少强, 何远江

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 称局部紧完备度量空间上的 Radon 测度为强 Radon 测度. 若每个有界集的测度都是有限的. 证明了强 Radon 计数测度卷积半群是一个稳定的 Hun 半群.

关键词: Hun 半群; 强 Radon 计数测度

中图分类号: O152.7; O221.4; O221.6 **文献标识码:** A

Hun 半群理论是研究概率论中的半群结构的有力工具, 完备可分度量空间上的计数测度及局部紧全正则空间上的有限计数测度都是稳定的 Hun 半群^[1,2]. 去掉文 [1] 的可分性条件或文 [2] 的有限性条件, 本文证明了局部紧完备度量空间上的强 Radon 计数测度也是一个稳定的 Hun 半群.

设 X 是局部紧完备度量空间, $\mathcal{B}(X)$ 是 X 的所有开子集生成的 σ 代数. $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别表示 $\mathcal{B}(X)$ 中全体紧集和全体有界集组成的类.

定义 1 分别称 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上的测度 μ 为 Radon 测度、强 Radon 测度、Radon 计数测度、强 Radon 计数测度, 若它分别满足下面的 1) 和 5), 2) 和 5), 3) 和 5), 4) 和 5). 分别以 M_+, M, N_+, N 表示这样的测度的全体. 1) $\mu(C) < \infty, \forall C \in \mathcal{N}$; 2) $\mu(B) < \infty, \forall B \in \mathcal{B}$; 3) $\mu(C) \in \{0, 1, 2, \dots\}, \forall C \in \mathcal{N}$; 4) $\mu(B) \in \{0, 1, 2, \dots\}, \forall B \in \mathcal{B}$; 5) $\mu(B) = \sup\{\mu(C); C \subset B, C \in \mathcal{N}, \forall B \in \mathcal{B}(X)\}$.

显然 $N \subset M \subset M_+, N \subset N_+ \subset M_+$. 这里只考虑 M_+ 上的 vague 拓扑 (文 [3], 2.4.1) 并在 M, N_+, N 上赋予 M_+ 的子拓扑. 易知, $(M_+, +)$ 是 T_2 拓扑半群, $(M, +), (N_+, +), (N, +)$ 是它的子半群.

定理 1 $(M_+, +), (M, +), (N_+, +), (N, +)$ 都是 Hun 半群.

证明 Hun 半群的定义见文 [4], 2.2.2. 仅证每个元 μ 的因子集 T_μ 都是紧集. 对于 M_+ , 设 f 为有紧支撑的非负连续函数, 则 $\sup\{\int f d\nu; \nu \in T_\mu\} \leq \int f d\mu < \infty$. 由文 [3], 2.4.5, T_μ 是相对紧的, 由文 [4], 2.2.3, T_μ 是紧集. 对于 M , $\{\nu \in M; \nu \upharpoonright \mu\} = \{\nu \in M_+; \nu \upharpoonright \mu\}$ 是紧集. 对于 N_+ , 由文 [3], 2.4.12, N_+ 是 M_+ 中闭集, 由文 [4], 2.2.6, N_+ 是 Hun 半群. 对于 N , $\{\nu \in N, \nu \upharpoonright \mu\} = \{\nu \in N_+, \nu \upharpoonright \mu\}$ 是紧集.

引理 1 对任意 $\mu \in N$, 集合 $E \doteq \{a \in X; \mu(a) > 0\}$ 是有限或可列集, 其中, $\mu(a) \doteq$

* 收稿日期: 1999-10-25; 作者简介: 宋少强 (1973 ~), 男, 研究生.

$= \mu(\{a\})$. 设 $\mu^* := \sum_{a \in X, \mu(a) > 0} \mu(a) \hat{q}_a$, 则 $\mu = \mu^*$.

证明 由定义 1, 仅需证 E 为有限或可列集及 $\mu(C) = \mu^*(C)$, $\forall C \in \mathcal{K}$. 由于 C 的每一开覆盖有有限子覆盖, 故完全可以仿照文 [5], 1.7 的证明.

引理 2 设 $\{\mu_n\}$ 是 N 中收敛于 $\mu \in N$ 的网, $C \in \mathcal{K}$. 又设 $\{a_1, \dots, a_s\} := \{a \in C: \mu(a) > 0\}$, $f_1, \dots, f_t$ 为 X 上的连续函数. 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 及开集 $C^* \supset C$, 使

1) $|f_k(a) - f_k(a_j)| < \epsilon, \forall k, j, \forall a \in B_\delta(a_j); \overline{B_\delta(a_i)} \cap \overline{B_\delta(a_j)} = \emptyset, \forall i \neq j$; 其中, $B_\delta(a_j) := \{a \in X: \rho(a, a_j) < \delta\}$.

2) $\lim_n \mu_n(B_\delta(a_j)) = \mu(a_j), \forall j$.

3) $B_\delta \subset C^*, \forall j$, 且 $\lim_n \mu_n(C^*) = \mu(C)$.

证明 设开集 $V \supset C$ 且 V 有紧的闭包. 设当 $\delta = \delta_0 > 0$ 时 1) 成立, 又设 $d_1 = \rho(C, V^c)$, $d_2 = \min\{\rho(a, C): a \in V \setminus C, \text{ 且 } \mu(a) > 0\}$, $\delta = \min\{d_1, d_2, \delta_0\}/3$, $C^* := \{x: \rho(x, C) < 2\delta\}$. 则 C^* 及所有的 $B_\delta(a_j)$ 均为 μ 连续集且 $\mu(C^*) = \mu(C)$, $\mu(B_\delta(a_j)) = \mu(a_j), \forall j$. 2), 3) 得证.

定理 2 N 是稳定的.

证明 用反证法来证明 N 满足文 [4], 2.15.1 (b) 中的等价定义.

设 $(\mu_n)(\nu_n)(\lambda_n)$ 是 N 中的 3 个网, $\mu_n = \nu_n + \lambda_n$. (μ_n) 收敛于 $\mu \in N$. 若 (ν_n) 没有聚点, 则每个 $x \in T_\mu$ 都存在邻域 U_x 和 n_x , 使当 $n \geq n_x$ 时, $(\nu_n) \not\subseteq U_x$. 以下将证明存在一个 $x \in T_\mu$ 和 $n > n_x$, 满足 $\nu_n \in U_x$, 从而推出矛盾.

由 vague 拓扑的性质, 每个 $x \in T_\mu$ 都存在如下形式的邻域 $V^x \subset U_x$:

$$V^x = \{\nu \in N: |\int f_i d\nu - \int f_i d\mu| < 2\epsilon_i^x, i = 1, \dots, k(x)\}.$$

其中, $\epsilon_1^x, \dots, \epsilon_{k(x)}^x > 0, f_1^x, \dots, f_{k(x)}^x$ 是 X 上有紧支撑的连续函数. 设

$$V_x := \{\nu \in N: |\int f_i d\nu - \int f_i d\mu| < \epsilon_i^x, i = 1, \dots, k(x)\}.$$

紧集 T_μ 的开覆盖 $\bigcup_{x \in T_\mu} V_x$ 存在有限子覆盖 $\bigcup_{i \leq m} V_{x(r)}$, 设 $C_i^{x(r)}$ 是 $f_i^{x(r)}$ 的紧支撑, $\forall i, r$. 则 $C := \bigcup_{i,r} C_i^{x(r)}$ 是紧的. 在引理 2 中, 令

$$\epsilon := \min_{i,r} \epsilon_i^{x(r)} / \mu(C), \{f_1, \dots, f_t\} := \{f_i^{x(r)}: r = 1, \dots, m; i = 1, \dots, k(x(r))\}.$$

设 $\{a_1, \dots, a_s\}$, C^* 及 δ 均如引理 2 所叙, 则

$$\lim_n \mu_n(B_\delta(a_j)) = \mu(a_j), \forall j$$

因为 $\mu_n(B_\delta(a_j))$ 是整数值, 故存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, $\nu_n(B_\delta(a_j)) \leq \mu_n(B_\delta(a_j)) = \mu(a_j), \forall j$. 设 $(\nu_{n(k)})$ 为 (ν_n) 的 1 个子网, 且整数网 $(\nu_{n(k)}(B_\delta(a_j)))$ 收敛于整数 $t_j, \forall j$. 则存在 k_1 , 当 $k \geq k_1$ 时, $\nu_{n(k)}(B_\delta(a_j)) = t_j \leq \mu(a_j)$.

设 $x_0 := \sum_j t_j \hat{q}_j$, 则 $x_0 \in T_\mu$. 故存在 r , 使 $x_0 \in V_{x(r)}$. 由引理 2,

$$\lim_n \mu_n(C^*) = \mu(C) = \sum_j \mu(a_j) = \lim_n \sum_j \mu_n(B_\delta(a_j))$$

设 $E := \bigcup_j B_\delta(a_j)$, 由上式知存在 $k_2 \geq k_1$, 当 $k \geq k_2$ 时, $\mu_{n(k)}(C^* \setminus E) = 0$, 故 $\nu_{n(k)}(C^* \setminus E) = 0$. 设 $K \geq k_2$, 且 $n(K) \geq n(x(r))$, 则对任意的 i 有

$$\left| \int f_i^{x(r)} d\nu_{n(K)} - \int f_i^{x(r)} d\nu_{x(r)} \right| \leq \left| \int_E f_i^{x(r)} d\nu_{n(K)} - \int_E f_i^{x(r)} d\nu_{x_0} \right| + \left| \int f_i^{x(r)} d\nu_{x_0} - \int f_i^{x(r)} d\nu_{x(r)} \right| \leq \epsilon^\mu(C) + \epsilon_i^{x(r)} \leq 2\epsilon_i^{x(r)}.$$

故 $\nu_{n(K)} \in V_{x(r)}$, 从而导出矛盾.

注 非可分的局部紧完备度量空间的例: 设 K 为不可列集, K 上的度量 ρ 定义为 $\rho(x, x) = 0$ 及 $\rho(x, y) = 1$ 当 $x \neq y$. 则 K 是不可分的, 易见 K 是局部紧完备度量空间.

参考文献:

- [1] LIANG Z S, HE Y J, LI Z Q. Hun semigroup structure of point processes, density of indecomposable distributions on a semigroup[J]. Studia Sci Math Hungarica, 1996, 32(1-2): 59~70.
- [2] ZEMMPLÉNI A. On the heredity of Hun and Hungarian property[J]. J Theoret Probab, 1990, 3(4): 599~609.
- [3] BERG C, CHRISTENSEN J P R, RESSEL P. Harmonic analysis on semigroups[M]. New York: Springer, 1984. 50~54.
- [4] RUZSA I Z, SZÉKELY G J. Algebraric probability theory[M]. New York: Wiley, 1988. 15~48.
- [5] 戴永隆. 随机点过程[M]. 广州: 中山大学出版社, 1984. 2~3.

The Hun Semigroup Structure of Counting Measures on a Non-Separable Space

SONG Shao-qiang^{*}, HE Yuan-jiang

Abstract: A Radon measure on a locally compact complete metric space is called a strong Radon measure if each bounded set has finite measure. It is proved that the convolution semigroup of strong Radon counting measures is a stable Hun semigroup.

Keywords: Hun semigroup; strong Radon counting measure

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China