

文章编号: 0529-6579 (2000) 03-0015-05

随机环境中马氏链的强大数定理^{*}

李 炜, 郭先平

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究随机环境中可列状态马氏链的有关强大数定理. 证明了关于通常的非齐次马氏链的很多强大数定理. 对于随机环境中的马氏链仍然成立.

关键词: 随机环境; 马氏链; 强大数定理

中图分类号: O211.62 **文献标识码:** A

马氏链的极限理论是随机过程中的重要研究内容, 但那些研究均是对确定的马氏链而言的, 即他们研究中马氏链的环境是固定不变的. 近年来, 随机环境中马氏链的研究已引起人们的极大兴趣. Bourgin^[1] 研究了随机环境中马氏链的吸收概率, Cogburn^[2,3] 研究了随机环境中马氏链的遍历理论和中心极限定理. Seppäläinen^[4] 研究了具有随机转移马氏链的大偏差, 但关于随机环境中马氏链的强大数定理似乎还未见探讨. 本文的旨在做点尝试性工作.

1 随机环境中马氏链的性质

设 S 为有限或可列集, $\mathcal{S}$ 为 S 的一切子集, $(S, \mathcal{S})$ 为可测状态空间, $\mathbf{N}$ 为全体非负整数集. $S^{\mathbf{N}}$ 称为轨道空间, $\mathcal{S}^{\mathbf{N}}$ 是相应的由柱集产生的乘积 σ -代数, 以 M 记 S 上的全体随机矩阵, G 记 S 上的全体初始分布, $M^{\mathbf{N}}$ 记相应 M 的乘积集合. 设 $\mu = (\mu(i), i \in S) \in G$, $m = (m_n, n \in \mathbf{N}) \in M^{\mathbf{N}}$, $x = (x_n, n \in \mathbf{N}) \in S^{\mathbf{N}}$, 令:

$$P_{\mu}^m(x_0) \triangleq \mu(x_0), P_{\mu}^m(x_0, x_1, \dots, x_n) \triangleq \mu(x_0) m_0(x_0, x_1) \cdots m_{n-1}(x_{n-1}, x_n), n \geq 1$$

于是 P_{μ}^m 可唯一延拓为 $(S^{\mathbf{N}}, \mathcal{S}^{\mathbf{N}})$ 上的概率分布, 全体这样的分布的集合 $\{P_{\mu}^m; m \in M^{\mathbf{N}}, \mu \in G\}$ 仍简记为 $M^{\mathbf{N}}$. 下面构造 $M^{\mathbf{N}}$ 上的 σ -代数 $m^{\mathbf{N}}$ 如下: 对任何固定的 $A \in \mathcal{S}^{\mathbf{N}}$, 作映射 $f_A: M^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{R}, P_{\mu}^m \rightarrow P_{\mu}^m(A)$, $m^{\mathbf{N}}$ 为由 $\{f_A^{-1}(B); A \in \mathcal{S}^{\mathbf{N}}, B \text{ 为 } \mathbf{R} \text{ 上的任意 Borel 集}\}$ 所生成的 σ -代数. Q 是可测空间 $(M^{\mathbf{N}}, m^{\mathbf{N}})$ 上的概率分布, 称 $(M^{\mathbf{N}}, m^{\mathbf{N}}, Q)$ 为随机环境. 令:

$$\Omega = M^{\mathbf{N}} \times S^{\mathbf{N}}, \mathcal{F} = m^{\mathbf{N}} \times \mathcal{S}^{\mathbf{N}}$$

设 $\omega = (\omega_n, n \in \mathbf{N}) \in S^{\mathbf{N}}, \eta \in M^{\mathbf{N}}$, 记 $\bar{\omega} = (\eta, \omega) \in \Omega$, 并令: $X_n(\bar{\omega}) = X'_n(\omega) \triangleq \omega_n, (n \geq 0)$, 则 $\{X_n(\omega), n \geq 0\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的随机过程, $\{X'_n(\bar{\omega}), n \geq 0\}$ 是 $(S^{\mathbf{N}}, \mathcal{S}^{\mathbf{N}})$ 上的随机过

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (980287)

收稿日期: 1999-08-17; 作者简介: 李炜 (1964~), 男, 博士生.

程. 由于 $X_n(\omega) = X'_n(\omega)$ 与 η 无关, 因此今后将上述 2 个过程都写成 X_n , 这不会引起混淆. 由 M^N 的构成有引理 1.

引理 1 固定 $A \in \mathcal{S}^N$, 则将 $\eta(A)$ 看成 η 的函数是 m^N 可测的.

由引理 1, 对任意 $\Gamma \in m^N$, $A \in \mathcal{S}^N$, 可令 $P(\Gamma \times A) \triangleq \int \Gamma \eta(A) Q(d\eta)$, 将 P 到 $\mathcal{S}$ 上的唯一延拓的概率测度仍记为 P , 于是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 成为一个概率空间.

约定 E, E_Q, E_η 分别表示概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, (M^N, m^N, Q) 和 $(S^N, \mathcal{S}^N, \eta)$ 上数学期望.

定义 1 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 称为随机环境 (M^N, m^N, Q) 中的取值于 S 上的马氏链.

引理 2 设 β 是 $\mathcal{S}^N$ 的子 σ -代数, 且有互不相交可列生成, 又设 $f(x)$ 是 $\mathcal{S}^N$ 有界可测函数, 则 $E_\eta(f(x) | \beta)$ 是 $m^N \times \beta$ 可测的.

证明 设 A_n 是 β 的互不相交的可列生成, 且 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = S^N$. 约定, 当 $\eta(A_n) = 0$ 时,

$\frac{1}{\eta(A_n)} \int_{S^N} I_{A_n}(y) f(y) \eta(dy) = 0$, 则可直接验证

$$E_\eta(f(x) | \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{A_n}(x)}{\eta(A_n)} \int_{S^N} I_{A_n}(y) f(y) \eta(dy) \quad \eta \in M^N$$

从而利用引理 1 和单调类定理容易得到 $E_\eta(f(x) | \beta)$ 是 $m^N \times \beta$ 可测的.

引理 3 设 β 是 $\mathcal{S}^N$ 的有互不相交可列生成的子 σ -代数, α 是 m^N 的子 σ -代数, f 是 $m^N \times \mathcal{S}^N$ 上的有界可测函数, 若 $E_\eta(f(\eta, x) | \beta)$ 是 $\alpha \times \beta$ 可测的, 则有:

$$E(f(\eta, x) | \alpha \times \beta) = E_\eta(f(\eta, x) | \beta) \quad \text{a.e.} - P$$

特别, 如果 $f(x)$ 是有界 $\mathcal{S}^N$ 可测函数且 $E_\eta(f(x) | \beta)$ 是 $\alpha \times \beta$ 可测的, 则

$$E(f(x) | \alpha \times \beta) = E_\eta(f(x) | \beta) \quad \text{a.e.} - P$$

证明 因为 $E_\eta(f(\eta, x) | \beta)$ 是 $\alpha \times \beta$ 可测的, 故只需证明: 对任何 $B \in \alpha \times \beta$, 有 $E I_B f(\eta, x) = E I_B (E_\eta(f(\eta, x) | \beta))$, 由单调类定理知, 只需证明: 对任何 $\Gamma \in \alpha$, $A \in \beta$, 有:

$$E_Q(E_\eta(I_{\Gamma \times A} f(\eta, x))) = E_Q(E_\eta(I_{\Gamma \times A} (E_\eta(f(\eta, x) | \beta))))$$

事实上, $E_Q(E_\eta(I_{\Gamma \times A} (E_\eta(f(\eta, x) | \beta)))) = E_Q(I_\Gamma (E_\eta I_A (E_\eta(f(\eta, x) | \beta)))) =$

$$E_Q(I_\Gamma E_\eta(I_A f(\eta, x))) = E_Q(E_\eta(I_\Gamma I_A f(\eta, x))) = E_Q(E_\eta I_{\Gamma \times A} f(\eta, x))$$

引理 4 设 $\{X_n\}$ 是随机环境中的马氏链, 对任意非负整数序列 $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots < n_{m+k}$ 及 S^{k+1} 的有界函数 f , 令:

$$E[f(X_{n_m}, \dots, X_{n_{m+k}}) | X_{n_0}, \dots, X_{n_m}] \triangleq E(f(X_{n_m}, \dots, X_{n_{m+k}}) | m^N \times \sigma(X_{n_0}, \dots, X_{n_m}))$$

则 $E(f(X_{n_m}, \dots, X_{n_{m+k}}) | X_{n_0}, \dots, X_{n_m})(\eta, \omega) = E[f(X_{n_m}, \dots, X_{n_{m+k}}) | X_{n_m}](\eta, \omega) =$

$$E_\eta(f(X_{n_m}, \dots, X_{n_{m+k}}) | X_{n_m})(\omega)$$

证明 由马氏链的性质, 对任何 $\eta \in M^N$, 有:

$$E_\eta(f(X_{n_m}, \dots, X_{n_{m+k}}) | X_{n_m}) = E_\eta(f(X_{n_m}, \dots, X_{n_{m+k}}) | \sigma(X_{n_0}, \dots, X_{n_m})) =$$

$$\sum_{\substack{x \in S \\ n_{m+1} \leq i \leq n_{m+k}}} f(X_{n_m}, x_{n_{m+1}}, \dots, x_{n_{m+k}}) \eta_{n_m}(X_{n_m}, x_{n_{m+1}}) \eta_{n_{m+1}}(x_{n_{m+1}}, x_{n_{m+2}}) \dots$$

$$\dots \eta_{n_{m+k-1}}(x_{n_{m+k-1}}, x_{n_{m+k}}) \quad (1)$$

对任何固定的 k 和 $x, y \in S$, 由定义易得: $\bar{f}(\eta) \triangleq \eta_k(x, y) (\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k, \dots))$, 由引理 1 有 $\eta_k(x, y) = \eta(x_k = x, x_{k+1} = y) / \eta(x_k = x)$ 为 m^N 可测, 进而有 $\bar{f}(\eta)$ 是 $m^N \times \sigma(X_{n_0}, \dots, X_{n_m})$ 可测, 又 $f(X_{n_m}, x_{n_m+1}, \dots, x_{n_m+k})$ 是 $\sigma(X_{n_m})$ 可测, 从而是 $m^N \times \sigma(X_{n_0}, \dots, X_{n_m})$ 可测, 于是可得 (1) 式的右边是 $m^N \times \sigma(X_{n_0}, \dots, X_{n_m})$ 可测的; 又由 S 的可数性知, $\sigma(X_{n_0}, \dots, X_{n_m})$ 是互不相交可列生成的, 因此, 由引理 3 知 $E_\eta(f(X_{n_m}, \dots, X_{n_m+k}) | X_{n_m})(\omega) = E[f(X_{n_m}, \dots, X_{n_m+k}) | X_{n_0}, \dots, X_{n_m}](\eta, \omega)$. 令 $n_0 = n_m$, 则由上式得 $E_\eta(f(X_{n_m}, \dots, X_{n_m+k}) | X_{n_m})(\omega) = E(f(X_{n_m}, \dots, X_{n_m+k}) | X_{n_m})(\eta, \omega)$.

2 主要引理及其证明

引理 3, 4 揭示了随机环境中的马氏链与固定环境下马氏链的内在联系, 它启示我们在讨论随机环境中马氏链的强大数定理之前, 应先分析固定环境中马氏链的强大数定理.

引理 5 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是定义于某个概率空间 $(\Omega^*, \mathcal{F}, P^*)$ 上的任意非齐次马氏链, 其状态空间为 S^* , $\{f_m, m \geq 1\}$ 是定义于 $S^{*(k+1)}$ (k 为非负整数) 上的 $(k+1)$ 元有界函数, $\{a_m, m \geq 1\}$ 是一列单调递增趋于无穷的非负数列, 记 $x_{-n} (n \geq 1)$ 为常数, 如果
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} E^*[f_n^2(X_{n-k}, \dots, X_n)] < \infty$$
, 则对任何正整数 t , 恒有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^n (E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k}] - E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-t}]) = 0 \quad \text{a.s. } P^*$$

证明 对任何 $1 \leq i \leq t$, 令

$$Y_m^{(i)} = E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i+1}] - E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i}], m \geq 1$$

于是有: $\sigma(Y_1^{(i)}, \dots, Y_{m-1}^{(i)}) \subset \sigma(X_0, X_1, \dots, X_{m-k-i}) \quad (m \geq 2)$

〔当 $m < k+i$ 时, $\sigma(X_0, X_1, \dots, X_{m-k-i}) \triangleq (\Omega, \emptyset)$ 〕, 利用条件期望性质和过程马氏性有

$$E^*[Y_m^{(i)} | Y_1^{(i)}, \dots, Y_{m-1}^{(i)}] = E^*[E^*[Y_m^{(i)} | X_0, \dots, X_{m-k-i}] | Y_1^{(i)}, \dots, Y_{m-1}^{(i)}] E^*[Y_m^{(i)} | X_0, \dots, X_{m-k-i}] =$$

$$E^*[E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i+1}] | X_0, \dots, X_{m-k-i}] - E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i}] =$$

$$E^*[E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_0, \dots, X_{m-k-i+1}] | X_0, X_1, \dots, X_{m-k-i}] - E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i}] =$$

$$E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_0, \dots, X_{m-k-i}] - E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i}] =$$

$$E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i}] - E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i}] = 0.$$

于是得 $\{Y_m^{(i)}, m \geq 1\}$ 为鞅差序列. 由条件期望的 Jensen 不等式又得:

$$E^*(E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i+1}])^2 \leq E^*(E^*[f_m^2(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i+1}]) =$$

$$E^*[f_m^2(X_{m-k}, \dots, X_m)]$$

同理, $E^*(E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i}])^2 \leq E^*[f_m^2(X_{m-k}, \dots, X_m)]$,

再由不等式 $(a-b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ 可得:

$$E^*(Y_m^{(i)})^2 \leq 2\{E^*(E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i+1}])^2 +$$

$$E^*(E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-i}])^2\} \leq 4E^*[f_m^2(X_{m-k}, \dots, X_m)]$$

于是有
$$\sum_{m=1}^{\infty} E^*(Y_m^{(i)})^2 \leq \frac{1}{a_m^2} \leq 4\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m^2} E^*[f_m^2(X_{m-k}, \dots, X_m)]\right) < \infty$$

由鞅差序列的收敛定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^n Y_m^{(i)} = 0, \quad \text{a.s.} - P^*, 1 \leq i \leq t \quad (2)$$

$$\text{由定义得 } \sum_{i=1}^t Y_m^{(i)} = E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k}] - E^*[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-t}] \quad (3)$$

再由(2), (3)式即知引理结论成立.

引理 6 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是定义于某个概率空间 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ 上的任意齐次马氏链, 其状态空间 S^* 可列, 对任意的 $i, j \in S^*$, 令

$$D(i, j) \triangleq \{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \delta(X_m(\omega)) P^*(X_{m+1} = j | X_m = i) < \infty\}$$

则存在可测集 A , 使得 $P^*(A) = 1$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \delta(X_m(\omega)) [\delta(X_{m+1}(\omega)) - P^*(X_{m+1} = j | X_m = i)] = 0 \quad (4)$$

对一切 $\omega \in A \cap D(i, j)$ 成立.

证明 对任给 $i, j \in S^*$, 由文[5]中定理得, 存在 $A(i, j) \in \mathcal{S}^*$, 使得 $P^*(A(i, j)) = 1$, 且对一切 $\omega \in A(i, j) \cap D(i, j)$, 有(4)式成立. 再注意到 S^* 的可数性, 令 $A = \bigcap_{(i, j)} A(i, j)$, 即证.

3 强大数定理

定义 2 称环境空间 $(M^{\mathbb{N}}, m^{\mathbb{N}}, Q)$ 中的概率测度 Q 有可列支撑, 如果存在可列集 $A \in m^{\mathbb{N}}$, 使得 $Q(A) = 1$.

定理 1 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是随机环境中的马氏链, 环境空间 $(M^{\mathbb{N}}, m^{\mathbb{N}}, Q)$ 中的概率测度 Q 有可列支撑, $\{f_m, m \geq 1\}$ 是定义于 $S^{k+1} (k \in \mathbb{N})$ 上的 $(k+1)$ 元有界可测函数, $\{a_n, n \geq 1\}$ 是一列单调递增趋于无穷的正数列, 如果 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m} E[f_m^2(X_{m-k}, \dots, X_m)] < \infty$, 则对任何正整数 t , 关于 P 几乎处处有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^n (E[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k}] - E[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-t}]) = 0$$

证明 设 $\eta_1, \eta_2, \dots$ 为 Q 的可列支撑, 则:

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q(\eta_i) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m} E_{\eta_i}[f_m^2(X_{m-k}, \dots, X_m)] < \infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m} E_{\eta_i}[f_m^2(X_{m-k}, \dots, X_m)] < \infty$$

对任何固定的 η_i ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^n (E_{\eta_i}[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k}](\omega) - E_{\eta_i}[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-t}](\omega)) = 0, \text{ a. e. } \eta_i$$

e. η_i

由引理 4, 得

$$E[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k}](\eta_i, \omega) = E_{\eta_i}[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k}](\omega) \text{ a. e. } \eta_i$$

$$E[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-t}](\eta_i, \omega) = E_{\eta_i}[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-t}](\omega) \text{ a. e. } \eta_i$$

所以关于 P 几乎处处有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^n E[f_m(X_{m-k} | X_{m-k}, \dots, X_m)(\eta, \omega) - E[f_m(X_{m-k}, \dots, X_m) | X_{m-k-t}](\eta, \omega)] = 0$$

定理2 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是随机环境中的马氏链, 环境空间 (M^N, m^N, Q) 中的概率测度 Q 有可列支撑, 对任给 $i, j \in S$, 令:

$$D(i, j) = \{(\eta, \omega); \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \delta(X_m(\omega)) P(X_{m+1} = j \mid \{\eta\} \times \{X_m = i\}) < \infty\}$$

则存在可测集 $A^* \in m^N \times S^N$, 使得 $P(A^*) = 1$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \delta(X_m(\omega)) [\delta(X_{m+1}(\omega)) - P(X_{m+1} = j \mid \{\eta\} \times \{X_m = i\})] = 0 \quad (5)$$

对一切 $(\eta, \omega) \in A^* \cap D(i, j)$ 成立.

证明 任取 $(\eta, \omega) \in D(i, j)$, 令 $D(i, j)(\eta) = \{\omega \in S^N, (\eta, \omega) \in D(i, j)\}$. 由于 Q 有可列支撑, 故存在可列集 $B = \{\eta_1, \dots, \eta_n, \dots\} \in m^N$ 使得 $Q(B) = 1$, 对任何 $\eta_n \in B$, 由引理6, 存在可测集 $A_{\eta_n} \in S^N$, 使得 $\eta_n(A_{\eta_n}) = 1$, 且对一切 $\omega \in A_{\eta_n} \cap D(i, j)(\eta_n)$, 有(5)式成立. 令 $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\eta_n\} \times A_{\eta_n}$, 由 P 定义得 $P(A^*) = 1$. 显然, $(\eta, \omega) \in A^* \cap D(i, j)$, 于是存在 n 使: $(\eta, \omega) \in [\{\eta_n\} \times A_{\eta_n}] \cap D(i, j)$, $\omega \in A_{\eta_n} \cap D(i, j)(\eta_n)$ 得(5)式成立.

致谢: 作者衷心感谢导师戴永隆教授的悉心指导.

参考文献:

- [1] BOURGIN R D, COGBURN R. On determining absorption probabilities for Markov chains in random environments [J]. Adv Appl Prob, 1981, 13: 369~387.
- [2] COGBURN R. The ergodic theory of Markov chains in random environments [J]. Z W, 1984, 66: 109~128.
- [3] COGBURN R. On the central limits theorem for Markov chains in random environments [J]. Ann Prob, 1990, 19: 587~604.
- [4] SEPPÄLÄINEN T. Large deviations for Markov chains with random transitions [J]. Ann Prob, 1994, 22: 713~748.
- [5] 刘文, 杨卫国. 一类对可列非齐次 Markov 链普遍成立的大数定律 [J]. 科学通报, 1992, 37(16): 1448~1451.

On the Strong Law of Large Numbers for Markov Chains in Random Environments

LI Wei^{*}, GUO Xian-ping

Abstract: The strong law of large numbers for Markov chains in random environments are investigated and it is proved that many of the normal strong laws of large numbers for nonhomogeneous Markov chains still hold for Markov chains in random environments.

Keywords: random environments; Markov chains; strong law of large numbers

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China