

正规分离两个集的新概念及其属性^{*}

王 琪¹, 潘文熙²

(1. 中山大学教育学院, 广东 广州 510275; 2. 暨南大学数学系, 广东 广州 510632)

摘 要: 引入了正规分离并证明了它的存在性, 从而摆脱了原先分离存在性定理须预先假设存在近渡点的限制, 得到了完善化, 与此同时又建立了正规分离的一系列性质. 比如联系近渡点及最近点对的关系, 正规分离的唯一性等, 改进了著名的 Mazur 定理和 Eidelheit 分离定理.

关键词: 正规分离; 近渡点; 最近点对; 支撑超平面; 贴支撑

中图分类号: O174.41 **文献标识码:** A

1 2个凸集被分离与支撑

赋范空间 X 中, 给定 2 个不交集 F, G , 若有 $y_0 \in G$ 使

$$\rho(y_0, F) = \rho(F, G),$$

便称 y_0 是 G 对 F 的一个近渡点(nearest-cross point). 这里

$$\rho(F, G) = \inf_{x \in F, y \in G} \rho(x, y).$$

若进一步有 $x_0 \in F, y_0 \in G$, 使

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(F, G), (x_0, y_0)$$

便称为最近点对(proximity pair). 潘文熙^[1~3] 研究过它们的种种性质, 如存在性、唯一性、特征性及与可近性^[6] 等. 注意对最近点对言, 则 y_0 (或 x_0) 本身是个近渡点, 但反之不然, 即使 F 对 G 近渡点 x_0 存在且唯一, G 对 F 近渡点 y_0 存在且唯一, 也未见得最近点对存在^[3] (该例还可添加 F, G 内点作成 2 个凸集反例). 但若 F 对 G 近渡点 x_0 存在且 G 可近, 则存在最近点对 (x_0, y_0) . 研究近渡点性质当中重要的工具乃是文[2] 定理 1.2 的一个带距离性分离定理, 可惜定理曾预设了一个集的近渡点存在的前提下证出来的. 为了彻底完善化, 引入“正规分离”概念, 进而证明正规分离的存在性, 摆脱这个预先假设, 得到更普遍的应用. 现追溯著名的 Eidelheit 2 个凸集分离定理, 二凸集 A, B 若有 $\text{int } A \neq \emptyset, (\text{int } A) \cap B = \emptyset$ (注意未设 $A \cap B = \emptyset$ 更未设 $\rho(A, B) > 0$), 则有实有线性泛函 f 使 $\inf_{x \in A} f(x) \geq \sup_{y \in B} f(y)$. 也就是存在超平面 $P = \{x: f(x) = c\}$ (c 取为刚才不等式的任一中间值) 使 A, B 各在 P 之异侧 (以后的分离泛函 f 都选至使 $f(x) \geq f(y)$).

这样的 P 叫分离超平面. 对于一个超平面“紧贴”一个集概念出发, 就引出所谓“ P 支撑集 A ”的定义. 它是指 A 在 P 一侧, 且 $A \cap P \neq \emptyset$. 若进一步 $A \cap P \neq \emptyset$, 此交集的任一点 x_0 言, 称作“支撑点”并称“ P 支撑 A 于 x_0 点”. 支撑点一定是集 A 的边界点. 支撑关系总蕴含

^{*} 收稿日期: 2000-01-19; 作者简介: 王 琪 (1969~), 女, 讲师.

$\rho(A, P) = 0$. 反之, 此距离这零, 且 A 在 P 一侧, 我们称“ P 贴支承 A ”, 却未知 P 支承 A , 除非 A 是紧集.

如果加强预设凸集 F, G 有 $\rho(F, G) > 0$, 则结论有 $\inf_{x \in A} f(x) > \sup_{y \in B} f(y)$. 这就是强分离结论. 本文以下都预设 $\rho(F, G) > 0$. 如此强分离的超平面将有无限多, 其中有互相平行者, 任意的互相平行分离超平面对 (P', Q') 的全体记作 S . 每一对 (P', Q') 言, 其相互距离必定 $\rho(P', Q') \leq \rho(F, G)$. 给出任意 $x \in F, y \in G$, 联 xy 直线分别交 P', Q' 于一点 p', q' , 于是 $\rho(P', Q') \leq \rho(p', q') \leq \rho(x, y)$. 右方取 $\inf_{x \in F, y \in G}$ 即得 $\rho(P', Q') \leq \rho(F, G)$. 今若有一对 $(P, Q) \in S$ 到达距离之最大值时, $\rho(P, Q) = \rho(F, G)$. 这就引出“正规分离”概念.

定义1 2个凸集 $F, G, \rho = \rho(F, G) > 0$. 若有超平面 $P \parallel Q$, 按 F, Q, P, G 位置顺序, 使 P, Q 都分离 F, G 于相异外侧且 $\rho(P, Q) = \rho(F, G)$ 时, 便称 (P, Q) 是 F, G 的一对“正规分离超平面”, 并称这时 (Q, P) 正规分离 F, G . 从定义立刻知

命题1 对正规分离必有

$$\rho(P, F) = \rho(P, Q) = \rho(F, G) = \rho(Q, G); \rho(F, Q) = 0, \rho(G, P) = 0.$$

这是因为按相应位置

$$\rho(P, Q) \leq \rho(P, F) \leq \rho(F, G) \text{ 及 } \rho(P, Q) \leq \rho(Q, G) \leq \rho(F, G)$$

而2个等式左右相等. 末2个因为 $P \parallel Q, \rho(F, P) = \rho(F, Q) + \rho(P, Q)$. 所以

$$\rho(F, Q) = \rho(F, P) - \rho(P, Q) = 0$$

同理 $\rho(G, P) = 0$.

定理2 设 (Q, P) 正规分离紧凸集 $F, G, \rho(F, G) > 0$, 则一定 P 支承 G, Q 支承 F . (此定理只设 G 紧, 则推支承 G).

证明 今 G 在 P 一侧, 假若 P 非支承 $G, G \cap P = \emptyset$, 则 G 之余集含 P , 令 $P = \{x: f(x) = c\}$, 不妨设 $\|f\| = 1$, 因为 G 紧, 故此有正数 $r > 0$, 使凡 $y \in G$, 则

$$\rho(y, P) \geq r > 0, c - f(y) \geq r.$$

作 $P_1 = \{x: f(x) = c - r/2\}$, 则 $P_1 \parallel P$. 于是 $P_1 \parallel Q$. 及任意 $y \in G$, 有

$$\rho(y, P_1) = c - r/2 - f(y) \geq r - r/2 = r/2$$

因此 G 在 P 之一侧. 此时 Q, P_1 这对平行超平面仍分离 F, G 于外侧, 及 $\rho(Q, P_1) < \rho(Q, P) + r/2$. 因此 $\rho(Q, P)$ 不到达最大值, 这与正规分离假设矛盾. 故此一定 P 支承 G . 同理在 F 紧假设下, 有 Q 支承 F .

由定义1及以上性质, 因此文[2] 定理1.2这一个带距离性分离定理用正规分离描述, 实际已建立了(按文[2] 定理1.2中“ Q 支承 F ”一词应更正为“ Q 贴支承 F ”)

定理A 给定凸集 $F, G, \rho(F, G) > 0$. 设 G 对 F 的近渡点 y_0 存在, 则存在正规分离超平面 $Q, P, P \parallel Q$.

此结果要设近渡点存在. 以下将建立完善的正规分离存在性定理, 而不须设近渡点存在. 证明将对前者作一些修改, 然后再研究正规分离的种种属性.

2 正规分离的存在性、唯一性

将以著名的 Eidelheit 分离定理为出发点, 去证明以下存在定理.

定理3 给定2个凸集 $F, G, \rho(F, G) > 0$. 那么其正规分离超平面 Q, P 总是存在的.

证明 记 $\rho = \rho(F, G)$, 作 $H = \{u; \rho(u, F) < \rho\}$, 易证 H 是开集, $\text{int } H = H \neq \emptyset$. 又任意 $y \in G$, $\rho(y, F) \geq \rho$, 因此 $y \notin H$, 所以 $G \cap \text{int } H = \emptyset$. 依 Eidelheit 定理, 有实的 $f \in X^*$ 使 $\inf_{u \in H} f(u) \geq \sup_{y \in G} f(y)$.

先证 $\rho(P, F) = \rho$. 由分离性质 $\rho(P, F) \leq \rho(F, G) = \rho$. 今假若“ $<$ ”成立, 则存在 $z \in P$, $\rho(z, F) < \rho$, 即 $z \in H$. 而 z 为心有一个小球属于 H , 于是 P 中有一点其 2 侧都有 H 的点. 这与分离性矛盾, 因此 $\rho(P, F) = \rho$.

其次令 $c' = \inf_{x \in F} f(x)$, $Q = \{x; f(x) = c'\}$, 于是 $P \parallel Q$, $\rho(P, Q) = \frac{c' - c}{\|f\|}$. 依 c' 定义, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $x' \in F$ 使 $f(x') < c' + \epsilon$. 由命题 1 有

$$\rho = \rho(P, F) \leq \rho(x', P) = \frac{|f(x') - c|}{\|f\|} = \frac{c' - c + \epsilon}{\|f\|} = \rho(P, Q) + \frac{\epsilon}{\|f\|}.$$

其中, ϵ 任意小, 于是 $\rho \leq \rho(P, Q)$, 而 $\rho \geq \rho(P, Q)$ 是显然的, 因此 $\rho(P, Q) = \rho$. 这证明了 Q, P 是正规分离超平面, 证毕.

在研究正规分离唯一性之前, 要用到光滑点性质. 所谓 x_0 是 K 集的光滑点, 也就是 x_0 是 K 的一个边界点, 并且只有一个超平面过 x_0 支承 $K^{[8]}$. 在闭凸体(有内点)的边界点言, 过它存在支承超平面, 再根据下面引理, 则当 x_0 是 K 的光滑点时确有唯一一支承超平面, 并表明如何确定此平面. 以下对实值泛函 $q(x)$, 矢量 $h \neq 0$, 用 $q'(x_0, h)$ 表示在 x_0 处 h 方向和“ G 微分”, 即 $q'(x_0, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{qx_0 + th - q(x_0)}{t}$ (如果存在, 这里包括 $t \rightarrow 0^+$ 及 $t \rightarrow 0^-$).

引理 3^[8] 设 K 是闭凸体, $0 \in \text{int } K$, K 的度规泛函 (Gauge, 又称 Minkowski 泛函) 为 $q(x)$. x_0 是 K 边界上一个光滑点, 则 $q(x)$ 于 x_0 是 G -可微分的, 而且过 x_0 的支承 K 的超平面是 $q'(x_0, y) = 1$, 因而支承超平面是唯一确定的.

引入扩张集 $H = \{z; \rho(z, F) < r, r > 0\}$. 当 F 是凸集, 则 H 也是凸集. 又易证 H 是开集.

引理 4 给定 F 是可近光滑闭凸集 (F 光滑即 F 边界的每点是光滑点), H 如上面设, 则 H 是光滑开凸集.

证明 任取 H 一个边界点 z_0 (它不属于 H). 假如 P 是过 z_0 的 H 的支承超平面, 就有 $\rho(P, F) = r$. 在 F, P 之间作 P 的平行超平面 Q , 与 P 距离为 r 者, $\rho(P, Q) = r$, 则 $\rho(Q, F) = 0$. 由于任意 $x \in F$, $\rho(x, P) \geq r$, 因此 F 在 Q 一侧, 及因为距离 $\rho(P, F), \rho(P, Q)$ 皆为 r , 且 $P \parallel Q$, 乃有 Q 贴支承 F . 设 $x_0 \in F$ 是 P 到 F 的最近点 (因为 F 可近, 如此 x_0 存在), $\rho(x_0, z_0) = r$, 可见 Q 必过 x_0 . 于是 Q 是以 x_0 为支承点 F 的支承超平面, Q 被 P 唯一确定. 今假若 H 有过 z_0 的另一支承超平面 P' , 同上作法就相应过 x_0 的 F 另一支承超平面 Q' . 因为 F 以 x_0 为光滑点, 故此只能 Q, Q' 重合, 故此 P, P' 只能同一, 于是 H 是光滑集.

定理 5 (正规分离的唯一性) 给定 F 是可近的光滑闭凸体, G 是紧凸集, $\rho(F, G) > 0$, 那么其正规分离超平面 Q, P 是唯一的.

证明 令 $\rho = \rho(F, G)$. 作 $H = \{z; \rho(z, F) < \rho\}$. 依引理 4, H 是光滑凸集, 由定理 2, P 支承 G . 今证任一正规分离有超平面 P 分离 G, H 且支承 G, H . 因为 $\rho(P, F) = \rho$ (据命题 1), 依 H 定义, H 就在 P 之一侧, 其次要证 $\rho(P, H) = 0$. 取 $\{y_n\} \subset G$, $\rho(y_n, F) \rightarrow \rho$. 因为 F 可近, 存在 $\{x_n\} \subset F$, 使 $\rho(y_n, x_n) = \rho(y_n, F)$. $x_n y_n$ 线段交 H 边界于 z_n 点.

$\rho(y_n, z_n) = \rho(y_n, x_n) - \rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) - \rho(F, z_n) = \rho(x_n, y_n) - \rho \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 故此 $\rho(G, H) = 0$, 也即 $\rho(G, H) = 0$. 由于 G, H 各在 P 之不同侧, 因此, $\rho(P, H) = 0$.

又刚才的 $\{y_n\} \subset G$ 有 $\rho(y_n, H) \rightarrow 0$. 由于 G 是紧的, 存在子列 $y_{n_i} \rightarrow y_0 \in G$, $\rho(y_0, H) = 0$. 故此存在 G, H 的公共边界点 y_0 . 而 P 支承 G 与 H . 今凡正规分离的 P, P' 都应过 y_0 且支承 H 于 y_0 , 而 H 是光滑集, 所以 y_0 是光滑点, 因此只能 P, P' 重合. 于是 (P, Q) 与 (P', Q') 两组重合. 唯一性证完.

3 正规分离的一些属性

定理 6 设凸集 F, G , $\rho = \rho(F, G) > 0$. 平行超平面 Q, P 分离 F, G 于外侧, 按 F, Q, P, G 位置次序, 则它是正规分离当且仅当 $\rho(P, F) = \rho = \rho(Q, G)$.

证明 必要性, 已见于命题 1. 充分性, 先证 $\rho(P, G) = 0$. 作极小化列 $\{x_n\} \subset F, \{y_n\} \subset G$, $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho$. 因分离位置, 线段 $x_n y_n$ 与 P 必有交点 p_n .

$\rho(p_n, y_n) = \rho(x_n, y_n) - \rho(p_n, x_n) \leq \rho(x_n, y_n) - \rho(P, F)$. 由所设末项等于 ρ . 所以 $\rho(p_n, y_n) \rightarrow 0$, $\rho(P, y_n) \rightarrow 0$, 于是 $\rho(P, G) = 0$. 又 $\rho \geq \rho(y_n, Q) \geq \rho(G, Q) = \rho$. (末关系由已知条件) 所以 $\rho(y_n, Q) \rightarrow 0$, 而 $P \parallel Q$, 有 $\rho(y_n, Q) = \rho(P, Q) + \rho(P, y_n)$, 取 $n \rightarrow \infty$ 则 $\rho(P, Q) = \rho$. 由定义此种分离是正规分离.

定理 7 如上, 那么 P, Q 是正规分离当且仅当: (1) 任意 $\epsilon > 0$, 存在 $x \in F, p \in P$, 使 $\rho(x, p) < \rho(F, P) + \epsilon$, 同时 $\rho(p, G) < \epsilon$; 并且 (2.1) $\rho(F, P) = \rho(P, Q)$ 或 (2.2) $\rho(F, P) = \rho(G, Q)$ 或 (2.3) $\rho(F, Q) = 0$.

证明 (2.1)(2.2)(2.3) 必要性已由前面命题 1 指出.

(1) 必要性, 记 $\rho = \rho(F, G)$. 任意 $\epsilon > 0$, 存在 $x \in F, y \in G$, 使 $\rho(x, y) < \rho(P, G) + \epsilon$, xy 线交 P 于 p 点, $\rho(x, p) \leq \rho(x, y) < \rho + \epsilon = \rho(F, P) + \epsilon$. 又 $\rho(x, y) = \rho(x, p) + \rho(p, y)$, $\rho(p, y) = \rho(x, y) - \rho(x, p) < \rho + \epsilon - \rho(F, P) = \epsilon$, 于是 $\rho(p, G) < \epsilon$.

充分性, 依 (1) 假设, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $p \in P$, 使 $\rho(p, G) < \epsilon$ 及存在 $x \in F$, $\rho(x, p) < \rho(F, P) + \epsilon$. 又存在 $y \in G$ 使 $\rho(p, y) < 2\epsilon$, 故此 $\rho \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, p) + \rho(p, y) < \rho(F, P) + 3\epsilon$. ϵ 任意小, 于是 $\rho \leq \rho(F, P)$. 另一方面由分离性 $\rho \geq \rho(F, P)$, 于是 $\rho = \rho(F, P)$.

其次, 添上 (2.1) 假设下, 今已得 $\rho(P, Q) = \rho(F, P) = \rho$, 依定义 Q, P 是正规分离. 若添上 (2.2) 假设下, 合共 (1) 所推 $\rho = \rho(F, G) = \rho(G, Q)$, 依定理 6 充分性, 故是正规分离. 若添上 (2.3) 假设下, 因为 $\rho(F, Q) = 0$, 任意 $\epsilon > 0$, 存在 $x' \in G, q' \in Q$, 使 $\rho(x', q') < \epsilon$. 而容易证 $\rho(x', P) \leq \rho(x', q') + \rho(q', P)$, 所以 $\rho(F, P) \leq \rho(x', P) < \epsilon + \rho(q', P)$, 又因 $P \parallel Q$, $\rho(q', P) = \rho(P, Q)$, 故此 $\rho(F, P) < \epsilon + \rho(P, Q)$, 得到 $\rho(F, P) \leq \rho(P, Q)$. 又依分离位置, $\rho(F, P) \geq \rho(P, Q)$, 所以 $\rho(F, P) = \rho(P, Q)$, 合共上面由条件 (1) 所推 $\rho(F, P) = \rho$, 故此 $\rho(P, Q) = \rho$, 故此 Q, P 是正规分离.

其次考究正规分离与近渡点的一些关系.

定理 8 F, G 被超平面 Q, P 正规分离, $\rho = \rho(F, G) > 0$, 则交集 $P \cap G$ 含 G 的所有近渡点, 交集 $Q \cap F$ 含 F 的所有近渡点.

注 交集 $P \cap G, Q \cap F$ 都可能是空集, 即使它们非空, 近渡点也不一定存在, 或者存在也可能只是这个交集的部分点, 见下面例释.

证明 若不然有 G 的近渡点 $y_1, y_1 \notin P$. 因为 P 是闭集, $d = d(y_1, P) > 0$, 而接近渡点定义 $\rho(y_1, F) = \rho$, 有极小化列 $\{x_n\} \subset F$ 使 $\rho(x_n, y_1) \rightarrow \rho$. $x_n y_1$ 各在 P 的异侧, 联线段

$x_n y_1$ 乃与 P 交于 p_n , 有

$$\rho(x_n, y_1) = \rho(x_0, p_n) + \rho(p_n, y_1) \geq \rho(x_n, P) + \rho(y_1, P) \geq \rho(F, P) + d = \rho + d.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则 $\rho \geq \rho + d$, 矛盾, 所以凡 G 的近渡点属于 P .

$\mathbf{R}^2$ 中例 1 一条线段向上一个闭长方形 G , $P \cap G$ 中一些点就不是近渡点.

例 2 文[3] 断移开的 2 条半圆线, 每条只带一端头, 则有正规分离但无近渡点.

例 3 2 个相等正方形都斜摆 45° 便有唯一最近点对. 分别过它而不平行正方形各边的 2 条平行线不是正规分离, 则过一切近渡点.

正规分离的超平面表现为 $P = \{z: f(z) = c\}$, $Q = \{z: f(z) = c'\}$. 这时的 f 常称为正规分离泛函, 为方便常常不妨设为 $\|f\| = 1$, 并且设 $c' > c$.

定理 9 $\rho = \rho(F, G) > 0$, 如上表现的超平面 Q, P 分离凸集 F, G . 按 F, Q, P, G 位置次序, $G \cap P$ 含 y_1 点, 那么要使 Q, P 是正规分离必须且只须

$$(1) c' = \inf_{x \in F} f(x) \text{ 和}$$

$$(2) \inf_{x \in F} f(x - y) = \rho(F, G) \|f\|.$$

证明 必要性. 正规分离则 $\rho(P, Q) = \rho$, $P \parallel Q$, 而 $y_1 \in P$, 故此

$$\rho(y_1, Q) = \rho(P, Q) = \rho, \rho = \rho(y_1, Q) = \frac{c' - f(y)}{\|f\|}$$

而正规分离时 Q 贴支承 F , 所以

$$c' = \inf_{x \in F} f(x)$$

于是 $\rho \|f\| = c' f(y_1) = \inf_{x \in F} f(x - y_1)$.

充分性. 反之, 设 $c' = \inf_{x \in F} f(x)$

$$\text{有 } \rho(P, Q) = \rho(y_1, Q) = \frac{c' - f(y_1)}{\|f\|} = \inf_{x \in F} \frac{f(x - y_1)}{\|f\|} = \frac{\rho \|f\|}{\|f\|} = \rho$$

依定义这是正规分离.

现讨论正规分离与最近点对的关系. 若 (x_0, y_0) 是 F, G 的最近点对, 即 $\rho(x_0, y_0) = \rho(F, G)$, 则 x_0 是 F 对 G 近渡点, y_0 是 G 对 F 近渡点. 但反之不然, 即使 F 有唯一近渡点 x_0 , G 有唯一近渡点 y_0 , 仍然 (x_0, y_0) 可能不是最近点对, 见文[3] 241 页. 用类似定理 9 推法易得.

定理 10 设 F, G 有最近点对 (x_0, y_0) , 当 f 是正规泛函时, $f(x_0 - y_0) = \rho(F, G) \|f\|$. 也就是 $x_0 - y_0$ 是 f 的极大元.

讨论单点 x_0 (F 作为单点集时) 到 G 的佳逼问题, 刚才等式恰好说明 y_0 是 G 中对 x_0 的佳逼元^[7]. 而在 Hilbert 空间, 更有其几何意义, 即 y_0 是 x_0 到 G 佳逼元时, 矢量 $x_0 - y_0$ 正交于 P 中任何矢量.

来考虑可近平行超平面 P, Q 的“最短桥”即最近点对 x', y' 所联线段 $[x', y']$ ^[4]. 不设可近, 则最短桥不存在, 因为对 $x' \in Q$, 这时不存在 x' 到 P 的佳逼元也, 今联系到 F, G 的正规分离时有

定理 11 对 F, G 的正规分离 Q, P , 若 $F \cap Q, G \cap P$ 都非空, 则此 2 集之间 P, Q 的最短桥(如果存在)之两端之点对便是 F, G 最近点对全体.

因为如此桥端点 x', y' 显然 $\rho(x', y') = \rho(P, Q) = \rho(F, G)$, 乃知是最近点对. 而凡

F, G 的最近点对 (x', y') 不可能分别在 $F \cap Q, G \cap P$ 之外, 因为此时 x' 又是 F 的近渡点, 而据定理 7, x' 必含于 $F \cap Q$. 同理 y' 必含于 $G \cap P$.

最后考虑一下正规分离超平面的可近性何时保证. 因为 $P \nparallel Q$, 两者有一个可近, 另一个亦然. 故此只就 P 考究之.

引理^[3] 设 F 对 G 近渡点 x_0 存在, 且 G 可近, 则 F, G 的最近点对 (x_0, y_0) 存在.

定理 12 设凸集 F 对凸集 G 近渡点存在, G 可近, Q, P 正规分离 F, G . 则 P 是可近超平面.

因为根据引理, F, G 的最近点对 (x_0, y_0) 存在, $x_0 \in F \cap Q, \rho(x_0, y_0) = \rho(F, G) = \rho(Q, P) = \rho(x_0, P)$, 故此 y_0 是 x_0 到 P 的佳逼元, 而由超平面性质, 则空间任一点到 P 都有佳逼元^[6, 7].

参考文献:

- [1] 潘文熙. 两个凸集距离问题中近渡点的特征[J]. 暨南大学学报(自然科学版), 1999, 20(3): 1~7.
- [2] 潘文熙. 强分离定理及近渡点的一些性质[J]. 暨南大学学报(自然科学版), 1997, 18(3): 10~14.
- [3] 潘文熙. 关于最近点对及近渡点存在性与唯一性[J]. 数学研究与评论, 1995, 15(2): 237~243.
- [4] 潘文熙. 集合的距离与最近点对的性质[J]. 数学杂志, 1994, 14(4): 491~497.
- [5] 潘文熙. 关于集合近渡点存在及两个不交仿射集的探讨[J]. 暨南大学学报(自然科学版), 1995, 16(1): 14~25.
- [6] 潘文熙. 可近集及投影界的某些问题及新结果[J]. 数学季刊, 1989, 4(2): 39~48.
- [7] SINGER I. The theory of best approximation and functional analysis[M]. Philadelphia: SIAM, 1974. 65.
- [8] KOIHE G. Topological vector spaces[M]. New York: Springer-Verlag, 1983. 345~350.

New Concept of Normal Separation of Two Sets and Its Properties

*
WANG Qi , PAN Wen-xi

Abstract: The concept of normal separation (NS) of two convex sets is introduced. Its existence is proved. Then the restricting condition, existence of nearest-cross point, is relaxed. And then some properties of NS are established, e. g. uniqueness of NS; the relations between NS and nearest-cross points, etc. These generalize the well-known Eidelheit separation theorem and Mazur theorem extensively.

Keywords: normal separation; nearest-cross point; proximity pair; supporting hyperplane; adherent supporting