

文章编号: 0529-6579 (2000) 03-0011-04

关于非交换 Hopf-Galois 扩张^{*}

姜 小 龙

(中山大学数学研究所, 广东 广州 510275)

摘 要: 设 H 为有限 Hopf 代数, B 为交换环, H_0 为交换、余交换的有限 Hopf 代数范畴, C 为交换环范畴, A 为交换群范畴. 证明所有 H -Hopf Galois 扩张的同构类集合 $E(H, B)$ 定义一个范畴 $H_0 \times C$ 到 A 的双函子.

关键词: Hopf 模代数; Hopf-Galois 扩张; 有限生成投射生成子 (progenerator); 范畴函子

中图分类号: O153.3 **文献标识码:** A

1 有关引理

设 H 为交换环 R 上的有限 Hopf 代数, 称 R -代数 A 为 H -模代数是存在一个 A 上的 H -作用满足:

$$h(ab) = \sum_i (H_{(1)} \circ a)(h_{(2)} \circ b), \quad \forall h \in H, a, b \in A.$$

记 $A^H = \{a \in A \mid h \circ a = \varepsilon(h)a\}$ 为 B , 则 A 上的 H -作用诱导映射

$$\phi: A \otimes_{BA} \rightarrow \text{Hom}_R(H, A), \quad \phi(a \otimes a')(h) = a(h, a'), \quad \forall h \in H, a, a' \in A.$$

若 ϕ 为同构, 则称 A/B 为 H -Galois 扩张^[1].

若 H 为有限 Hopf 代数, 则任一 B 上的 H -Galois 扩张是有限生成投射 B -模^[2]. 所以所有 B 上的 H -Galois 扩张按 H -模代数同构分类构成一个集合, 记为 $E(H, B)$, 本文将证 $E(*, *)$ 为双函子. 文中用到文[3] 的 2 个结论如下:

引理 1^[3] 设 $\phi: G \rightarrow H$ 为有限 Hopf 代数间的映射, A 为 G -Galois 代数, 则 $\text{Hom}_G(H, A)$ 为 H -Galois 代数.

引理 2^[3] 设 A_i 为 H_i -Galois 代数, $i = 1, 2$, 则 $A_1 \otimes A_2$ 为 $H_1 \otimes H_2$ -Galois 代数.

引理 3 设 A/B 为 H -Galois 扩张, B 为交换环, 则 A 为 B -progenerator.

证明 A/B 为 H -Galois 扩张从而为有限生成投射模且 $A \# H \cong \text{End}_B(A)$ (文[2] 定理 1.7); 直接验证可得

$$\phi: \text{End}_{A \# H}(A) \cong A^H = B, \quad f \mapsto f(1_A)$$

即 $B \cong \text{End}_{\text{End}_B(A)}(A)$, 得到 A 为 B -忠实模, 从而为 B -progenerator.

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19771090)

收稿日期: 1999-05-20; 作者简介: 姜小龙 (1969~), 女, 讲师.

2 主要结论

定理 1 记 H 为有限 Hopf 代数范畴, S 为集合范畴, 则

$$E(,): H \times C \rightarrow S, H \times B \mapsto E(H, B), \forall H \in H, B \in S \text{ 为双函子.}$$

证明 分 3 步证明之.

(1) $\forall H \in H, T_1, T_2 \in C$ 以及 $f \in \text{Hom}_C(T_1, T_2)$, 由引理 3 以及 Prop 1.2 知 $A \otimes_{T_1} T_2 / T_2$ 为 H -Galois 扩张. 定义映射

$$E(H, f): E(H, T_1) \rightarrow E(H, T_2), A \mapsto A \otimes_{T_1} T_2$$

易得若 $g \in \text{Hom}_C(T_2, T_3)$, 则 $E(H, gf) = E(H, g) \circ E(H, f)$.

(2) 设 $T \in C, \phi \in \text{Hom}_H(G, H)$. 由引理 1 可定义映射

$$E(\phi, T): E(G, T) \rightarrow E(H, T), A \mapsto \text{Hom}_G(H, A).$$

任取 $\psi \in \text{Hom}_H(H, I)$, 由 $\text{Hom}_H(HI, \text{Hom}_G(GH, GA)) \approx \text{Hom}_G(GH \otimes_{HI} GA) \approx \text{Hom}_G(GI, GA)$ 知 $E(\psi, T) = E(\phi T)$.

(3) 设 $f \in \text{Hom}_C(T_1, T_2), \phi \in \text{Hom}_H(G, H)$, 则有:

$$E(H, f)E(\phi, T)(A) = E(H, f)(\text{Hom}_G(H, A)) =$$

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_G(H, A \otimes_{T_1} T_2) \xrightarrow{(a)} (\text{Hom}_R(H, A))^G \otimes_{T_1} T_2 \xrightarrow{(b)} (\text{Hom}_R(H, A \otimes_{T_1} T_2))^G = \\ & \text{Hom}_G(H, A \otimes_{T_1} T_2) = E(\phi, T_2)E(H, f)(a), \quad \forall A \in E(H, T_1) \end{aligned}$$

式子中(a)、(b) 含义为:

(a) 定义 $\text{Hom}_R(H, A)$ 的 G -双边作用为

$$xfy(h) = f(yhx), \forall x, y \in G, f \in \text{Hom}_R(H, A), h \in H$$

则有 $\text{Hom}_G(H, A) = (\text{Hom}_R(H, A))^G = \{f \in \text{Hom}_R(H, A) \mid x \circ f = f \circ x, \forall x \in G\}$

(b) G 在 T_2 上的作用是平凡的. 又设 $H \in H, T \in C$, 记 I_H, I_T 为恒等映射, 易见

$$E(I_H, T) = E(H, I_T) = I_E(H, T).$$

综上所述, 证得 $E(,)$ 为双函子.

若 H 为交换、余交换的有限 Hopf 代数, 下证 $E(H, R)$ 为一交换群.

引理 4 令 G, H 为 R -代数, A, B 分别为 G, H -双模. 若 A 和 B^H 为有限生成投射 R -模, 则 $A^G \otimes_R B^H = (A \otimes_R B)^{G \otimes_R H}$.

证明 “ $\supset$ ” 显然; 往证 $(A \otimes_R B)^{G \otimes_R H} \subset A^G \otimes_R B^H$.

由假设可取 $\{f_i, a_i\}_i, \{e_k, b_k\}_k$ 分别为 A, B^H 的对偶基. 任取 $x = \sum_i a_i \otimes c_i \in (A \otimes_R B)^{G \otimes_R H}$, 则有: $\forall h \in H, \sum_i a_i \otimes c_i h$. 两边用 f_j 作用得:

$$\sum_j f_j(a_i) h c_i = \sum_j f_j(a_i) c_i h \Rightarrow \sum_j f_j(a_i) c_i \in B^H.$$

于是 $x = \sum_{i,j} a_j f_j(a_i) \otimes c_i = \sum_j a_j \otimes \sum_i f_j(a_i) c_i \in A \otimes B^H$. 设 $x = \sum_{(k)} d_k \otimes b_k, d_k \in A$ 且 $\forall g \in G$ 有 $\sum_{(k)} g d_k \otimes b_k = \sum d_k g \otimes b_k$, 重复上过程可得 $\sum_{(k)} e_s(b_k) d_k \in A^G$. 从而 $x = \sum_s (\sum_{(k)} e_s(b_k) d_k) \otimes b_s$ 即 $x \in A^G \otimes B^H$. 证毕.

推论 设 H_i, G_i 为有限 Hopf 代数, A_i 为 H_i -Galois 代数, $m_i, H_i \rightarrow G_i$ 为 Hopf 代数同态, $(i = 1, 2)$. 那么 $\text{Hom}_{H_1}(G_1, A_1) \otimes \text{Hom}_{H_2}(G_2, A_2) \approx \text{Hom}_{H_1 \otimes H_2}(G_1 \otimes G_2, A_1 \otimes A_2)$.

证明 G_i 上的 H_i -作用由 m_i 诱导. 定义双模结构 ${}_{H_i}\mathrm{Hom}_R(G_i, A_i)_{H_i}$ 为:

$$hfh'(g) = hf(h'g), \quad \forall h, h' \in H_i, g \in G_i, f \in \mathrm{Hom}_R(G_i, A_i)$$

由引理 1 $\mathrm{Hom}_{H_i}(G_i, A_i) = (\mathrm{Hom}_R(G_i, A_i))^{H_i}$ 为 G_i -Galois 代数从而为有限生成投射模 $\mathrm{Hom}_R(G_i, A_i)$ 亦然. 于是,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{H_1}(G_1, A_1) \otimes \mathrm{Hom}_{H_2}(G_2, A_2) &= (\mathrm{Hom}_R(G_1, A_1) \otimes \mathrm{Hom}_R(G_2, A_2))^{H_1 \otimes H_2} \approx \\ \mathrm{Hom}(G_1, A_1 \otimes \mathrm{Hom}(G_2, A_2))^{H_1 \otimes H_2} &\approx (\mathrm{Hom}(G_1, \mathrm{Hom}(G_2, A_1 \otimes A_2)))^{H_1 \otimes H_2} \approx \\ (\mathrm{Hom}(G_1 \otimes G_2, A_1 \otimes A_2))^{H_1 \otimes H_2} &= \mathrm{Hom}_{H_1 \otimes H_2}(G_1 \otimes G_2, A_1 \otimes A_2) \end{aligned}$$

定理 2 设 $H_1, H_2 \in \mathbf{H}$, 则 $E(H_1 \otimes H_2, R) \approx E(H_1, R) \times E(H_2, R)$.

证明 定义 $t_1, H_1 \otimes H_2 \rightarrow H_1, t_2, H_1 \otimes H_2 \rightarrow H_2$ 为

$$t_1(h \otimes g) = h\epsilon_2(g), \quad t_2(h \otimes g) = \epsilon_1(h)g$$

ϵ_i 为 H_i 的余单位, 不致混淆时都以 ϵ 记. t_i 为 Hopt 代数同态, 于是可诱导

$$E(t_i, R), E(H_1 \otimes H_2, R) \rightarrow E(H_i, R), \quad (i = 1, 2)$$

如定理 4 构造映射 t', t :

$$t': E(H_1, R) \times E(H_2, R) \rightarrow E(H_1 \otimes H_2, R), A \times B \mapsto A \otimes B;$$

$$t: E(H_1 \otimes H_2, R) \rightarrow E(H_1, R) \times E(H_2, R), A \mapsto E(t_1, R)(A) \times E(t_2, R)(A)$$

下面验证 t, t' 互逆:

$$\begin{aligned} (1) \quad t'(A) &= \mathrm{Hom}_{H_1^1 \otimes H_2^1}(H_1^1, A) \otimes \mathrm{Hom}_{H_1^2 \otimes H_2^2}(H_2^2, A) \approx \\ &\mathrm{Hom}_{H_1^1 \otimes H_2^1 \otimes H_1^2 \otimes H_2^2}(H_1^1 \otimes H_2^2, A \otimes A) \approx \\ &\mathrm{Hom}_{H_1^1 \otimes H_2^1 \otimes H_1^2 \otimes H_2^2}(H_1^1 \otimes R \otimes R \otimes H_2^2, H_1^1 \otimes H_2^1 A \otimes H_1^2 \otimes H_2^2 A) \approx \\ &\mathrm{Hom}_{H_1^1 \otimes H_2^1 \otimes H_1^2 \otimes H_2^2}(H_1^1 \otimes H_2^2 \otimes R \otimes R, H_1^1 \otimes H_2^1 A \otimes H_1^2 \otimes H_2^2 A) \approx \\ &\mathrm{Hom}_{H_1^1 \otimes H_2^1 \otimes H_2^2}(H_1^1 \otimes H_2^2, A) \otimes \mathrm{Hom}_{H_1^1 \otimes H_2^2}(R \otimes R, A) \approx \\ &A \otimes A^{H_1 \otimes H_2} = A \otimes R \approx A \end{aligned}$$

$$(2) \quad t'(A \otimes B) = \mathrm{Hom}_{H_1 \otimes H_2}(H_1, A \otimes B) \times \mathrm{Hom}_{H_1 \otimes H_2}(H_2, A \otimes B) \approx \mathrm{Hom}_{H_1}(H_1, A) \otimes \mathrm{Hom}_{H_2}(R, B) \times \mathrm{Hom}_{H_1}(R, A) \otimes \mathrm{Hom}_{H_2}(H_2, B) \approx (A \otimes R) \times (R \otimes B) \approx A \times B$$

(1) 式中 $H_i^j = H_i, (i, j = 1, 2)$, 模作用分别为:

$$\begin{aligned} (H_1^1 \otimes H_2^1) \otimes H_1^1 &\xrightarrow{m(I \otimes \epsilon \otimes I)} H_1^1; \quad (H_1^2 \otimes H_2^1) \otimes H_2^2 \xrightarrow{m(I \otimes \epsilon \otimes I)} H_2^2 \\ H_2^1 \otimes R &\xrightarrow{\epsilon \otimes I} R; \quad H_1^2 \otimes R \xrightarrow{\epsilon \otimes I} R \end{aligned}$$

(2) 式中模作用为: $(H_1 \otimes H_2)$ 的 H_i -作用由 t_i 诱导, $i = 1, 2$; H_i 在 R 上的作用由 $(\epsilon \otimes I)$ 给出. 至此得到定理所需之同构映射.

由定理 2, 当 $H_1 = H_2 = H$ 时, 记 H 的代数乘法为 M . 那么

$$E(H, R) \times E(H, R) \approx E(H \otimes H, R) \xrightarrow{E(M, R)} E(H, R)$$

若如此定义集合 $E(H, R)$ 上的乘法, 则 M 的结合性保证乘法的结合性, $\mathrm{Hom}(H, R) = H^*$ 为乘法单位元. 记乘法符号“ $\circ$ ”, 则 $(E(H, R), \circ)$ 为一交换幺半群.

定理 3 设 $H \in \mathbf{H}_0$, 则 $(E(H, R), \circ)$ 为交换群.

证明 记 S 为 H 的对极 (antipode), 则 S 可逆且为代数同态. 取 $\epsilon': H \rightarrow H, h \mapsto \epsilon(h)$,

则 $M(S \otimes 1) \Delta = \epsilon'$ 且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} E(H, R) & \xrightarrow{E((S \otimes 1) \Delta, R)} & E(H \otimes H, R) \\ \downarrow E(\epsilon', R) & & \approx \downarrow \text{定理 2} \\ E(H, R) & \longleftarrow & E(H, R) \times E(H, R) \end{array}$$

注意到任取 $A \in E(H, R)$, $E(\epsilon', R)(A) = \text{Hom}_H(H, A)$. 但

$$\forall f \in \text{Hom}_H(H, A), h \circ f(x) = f(h \circ x) = \epsilon(h)f(x)$$

即 $\text{Im } f \subset A^H = R$,

即 $E(\epsilon', R)(A) = \text{Hom}(H, R) = 1_{E(H, R)}$.

记 $B = E((S \otimes I) \Delta, R)(A) = B_1 \times B_2$,

$$B_1 = E((I \otimes \epsilon)(S \otimes 1) \Delta, R)(A) = E(S, R)(A),$$

$$B_2 = E((\epsilon \otimes 1)(S \otimes 1) \Delta, R)(A) = E((\epsilon S \otimes I) \Delta, R)(A) =$$

$$E(I_H, R)(A) = A.$$

追图法可得

$$B_1 \circ B_2 = E(m(S \otimes 1) \Delta, R)(A) = E(\epsilon, R)(A) = 1_{E(H, R)}$$

即 $A^{-1} = E(S, R)(A)$

定理 3 去掉了文献[3] 中相应结论所需条件: $H^* \approx \int_C^{H^*} \otimes H$ (作为双 H -模), 且将带

Galois 群的 Galois 代数相应性质(文[4]) 推广到 Hopf-Galois 代数上.

推论 $E(,)$ 为范畴 $H_0 \times C$ 到 A 的双函子.

参考文献:

- [1] YOKOGAWA K. Non-commutative Hopf-Galois extensions[J]. Osaka J Math, 1981, 18: 63~73.
- [2] KREMER H F, KAKEUCHI M. Hopf algebras and Galois extensions of an algebra[J]. Indiana Univ Math J, 1981, 30: 675~692.
- [3] YOKOGAWA K. The cohomology aspects of Hopf-Galois extension over a commutative ring[J]. Osaka J Math, 1981, 18: 75~93.
- [4] HARRISON D K. Abelian extensions of commutative rings[J]. Mem Amer Math Soc, 1965, 52: 66~79.

On Noncommutative Hopf-Galois Extensions

*
JIANG Xiao-long

Abstract: Let H be a finite Hopf algebra, B a commutative ring, H_0 the category of all commutative, co-commutative finite algebra, C the category of commutative rings and A of commutative groups. The main result here is that the set of all isomorphic classes of H -Galois extensions defines a bifunctor form $H \times C$ to A .

Keywords: Hopf module algebra; Hopf-Galois extensions; progenerator; bifunctor