

围长为 2 的本原有向图的最小顶点指数集^{*}

陈小亘

(湛江师范学院数学系, 广东 湛江 524048)

摘 要: 研究一类本原有向图的最小顶点指数集, 证明了 $n(\geq 3)$ 阶围长为 2 的本原有向图的最小顶点指数集 E_n 是: 若 n 是奇数, 则 $E_n = \{2, 3, \dots, 2n-3\}$; 若 n 是偶数, 则 $E_n = \{2, 3, \dots, 2n-4\}$.

关键词: 围长; 本原有向图; 顶点指数; 顶点指数集

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

1 问题的提出

广义本原指数是本原指数的拓广, 它在数学的某些分支如计算机科学、概率论等都有应用^[1]. 在广义本原指数集研究中的一个问题是研究各种特殊的本原有向图类的广义本原指数集. 本文研究围长为 2 的 n 阶本原有向图所成的类的最小顶点指数集 E_n .

一个本原有向图是指: 强连通的且所有不同圈长的最大公因数为 1 的有向图. 设 D 是 n 阶本原有向图, 其顶点集记为 $V(D) = \{1, 2, \dots, n\}$, 弧的集记 $E(D)$. 定义 $\exp_D(i, j)$ 是这样最小的整数 p , 使对于任一整数 $t \geq p$, 从顶点 i 到 j 都有长为 t 的途径 ($1 \leq i, j \leq n$). 又定义顶点 i 的顶点指数为: $\exp_D(i) = \max_{1 \leq j \leq n} \{\exp_D(i, j)\}$. 于是 $\exp_D(i)$ 是这样的最小整数 p , 使得从顶点 i 到 j 任意点都有不小于 p 的途径. 为方便处理, 选择 D 中顶点的次序满足:

$$\exp_D(1) \leq \exp_D(2) \leq \dots \leq \exp_D(n)$$

$\exp_D(1)$ 称为有向图 D 的最小顶点指数. D 的所有圈长的集记 $L(D) = \{r_1, \dots, r_\lambda\}$. 设 $R = \{r_{i_1}, \dots, r_{i_t}\} \subseteq L(D)$, 且 $r_{i_1}, \dots, r_{i_t}$ 的最大公因数 $(r_{i_1}, \dots, r_{i_t}) = 1$. D 中从顶点 i 到 j 相应于 R 的广义相对距离 $d_R(i, j)$ 是 D 中从顶点 i 到 j 接触 R 中所有圈长 $r_{i_1}, \dots, r_{i_t}$ (只要和一个长为 r 的圈有公共顶点就称接触了数 r) 的最短途径的长.

设 $a_1, \dots, a_s$ 是正整数, $(a_1, \dots, a_s) = 1$, 存在一个仅与 $a_1, \dots, a_s$ 有关的整数 $\phi(a_1, \dots, a_s)$, 凡不小于 $\phi(a_1, \dots, a_s)$ 的整数必可表为 $a_1x_1 + \dots + a_sx_s$ (整数 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, s$) 的形式, 而 $\phi(a_1, \dots, a_s) - 1$ 不能表为 $a_1x_1 + \dots + a_sx_s$ ($x_i \geq 0, i = 1, \dots, s$) 的形式, $\phi(a_1, \dots, a_s)$ 称为 Frobenius 数. 周知, $\phi(a_1, \dots, a_s)$ 是存在的, 且若 a_1, a_2 为正整数, $(a_1, a_2) = 1$, 则 $\phi(a_1, a_2) = (a_1 - 1)(a_2 - 1)$.

由文[2]知, 若 i, j 为本原有向图 D 中任意两顶点, $R = \{r_{i_1}, \dots, r_{i_t}\} \subseteq L(D)$, 且 $(r_{i_1}, \dots, r_{i_t}) = 1$, 则 $\exp_D(i, j) \leq d_R(i, j) + \phi\{r_{i_1}, \dots, r_{i_t}\}$.

2 引理和证明

为表达方便, 本文采用下面符号: (i, j) 表示由顶点 i 到顶点 j 的一条弧. $[i, j]$ 表示顶点 i 与顶点 j 之间的双向连通弧.

^{*} 收稿日期: 2000-04-17; 作者简介: 陈小亘 (1964~), 男, 讲师.

引理1^[3] 围长为2的 $n(\geq 3)$ 阶本原有向图的最小顶点指数的最大值是: 若 n 为奇数, 则其值为 $2n-3$; 若 n 为偶数, 则其值为 $2n-4$.

引理2 若 k 为奇数, n 为整数, $5 \leq k \leq n$, $V(D_1) = \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n-1, n\}$, $E(D_1) = \{(2, 1), (3, 2), \dots, (k-1, k-2), (1, k-2), (1, k-1), [k-1, k], [k-1, k+1], \dots, [k-1, n-1], [k-1, n]\}$, 则 $\exp_{D_1}(1) = \exp_{D_1}(1, 1) = 2k-4$.

证明 易见 D_1 为强连通图, 有长为2和 $k-2$ 的圈, $(2, k-2) = 1$, 因此 D_1 是围长为2的本原有向图. 取 $R = \{2, k-2\}$, 则 $\phi(2, k-2) = k-3$, 对任意顶点 $j \in V(D_1)$, $d_R(1, j) \leq 1+k-2$, $\exp_{D_1}(1, 1) \leq 1+k-2+\phi(2, k-2) = 2k-4$.

对任意整数 $m \geq 2k-4$, 在 D_1 中都存在从顶点1到顶点1的长为 m 的途径, 但不存在从顶点1到顶点1的长为 $2k-5$ 的途径, 因此 $\exp_{D_1}(1, 1) = 2k-4$.

可以验证, 对任意的顶点 $i(i \neq 1)$, 都有 $\exp_{D_1}(i) = \max_{1 \leq j \leq n} \{\exp_{D_1}(i, j)\} \geq 2k-4$, 因此 $\exp_{D_1}(1) = \exp_{D_1}(1, 1) = 2k-4$.

引理3 若 k 为奇数, n 为整数, $5 \leq k \leq n$, $V(D_2) = \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n-1, n\}$, $E(D_2) = \{(2, 1), (3, 2), \dots, (k-1, k-2), [k-1, k], [k-1, k+1], \dots, [k-1, n-1], [k-1, n], (1, k-2), (2, k-1)\}$, 则 $\exp_{D_2}(1) = \exp_{D_2}(k-1, 1) = 2k-5$.

证明 易见 D_2 为强连通图, 有长为2和 $k-2$ 的圈, $(2, k-2) = 1$, 因此 D_2 是围长为2的本原有向图. 取 $R = \{2, k-2\}$, 则 $\phi(2, k-2) = k-3$, 对任意顶点 $j \in V(D_2)$, $d_R(k-1, j) \leq k-2$, $\exp_{D_2}(k-1, 1) \leq k-2+\phi(2, k-2) = 2k-5$.

对任意整数 $m \geq 2k-5$, 在 D_2 中都存在从顶点 $k-1$ 到顶点1的长为 m 的途径, 但不存在从顶点 $k-1$ 到顶点1的长为 $2k-6$ 的途径, 因此 $\exp_{D_2}(k-1, 1) = 2k-5$.

可以验证, 对任意的顶点 $i(i \neq k-1)$, 都有 $\exp_{D_2}(i) = \max_{1 \leq j \leq n} \{\exp_{D_2}(i, j)\} \geq 2k-5$, 因此 $\exp_{D_2}(1) = \exp_{D_2}(k-1, 1) = 2k-5$. 由文[3] 容易得出下面2个引理.

引理4 若 k 为奇数, n 为整数, $3 \leq k \leq n$, $V(D_3) = \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n-1, n\}$, $E(D_3) = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (k-2, k-1), (k-2, k+1), (k-2, k+2), \dots, (k-2, n-1), (k-2, n), (k, 1), [k, k-1], [k, k+1], [k, k+2], \dots, [k, n-1], [k, n]\}$, 则 $\exp_{D_3}(1) = \exp_{D_3}(k, k-2) = 2k-3$.

引理5 若 k 为偶数, n 为整数, $3 < k \leq n$, $V(D_4) = \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n-1, n\}$, $E(D_4) = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (k-2, k-1), (k-1, 1), [k-1, k], [k-1, k+1], \dots, [k-1, n-1], [k-1, n]\}$, 则 $\exp_{D_4}(1) = \exp_{D_4}(k-1, k-2) = 2k-4$.

3 定理及证明

定理1 设 $n(\geq 3)$ 为整数, 则 $2 \in E_n$.

证明 考察围长为2的本原有向图 D_5 , 其中 $V(D_5) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $E(D_5) = \{(1, 3), [1, 2], [1, 4], [1, 5], \dots, [1, n-1], [1, n], [3, 2], [3, 4], [3, 5], \dots, [3, n-1], [3, n]\}$.

容易验证, $\exp_{D_5}(1) = \exp_{D_5}(1, 1) = 2$, 因此 $2 \in E_n$.

定理2 设 $n(\geq 3)$ 为奇数, 则 $\{3, 4, \dots, 2n-3\} \subseteq E_n$.

证明 对任意 $m \in \{3, 4, \dots, 2n-3\}$, 则 m 的取值只可能出现下列4种情形:

① 若 $m = 4t$, 取偶数 $k = 2t+2$, 因 $4 \leq m \leq 2n-3$, 则 $3 < k \leq n$, 由引理5, 存在围

长为 2 的本原有向图 D_4 , 使 $\exp_{D_4}(1) = \exp_{D_4}(k-1, k-2) = 2k-4 = m$.

② 若 $m = 4t-1$, 取奇数 $k = 2t+1$, 因 $3 \leq m \leq 2n-3$, 则 $3 \leq k \leq n$. 由引理 4, 存在围长为 2 的本原有向图 D_3 , 使 $\exp_{D_3}(1) = \exp_{D_3}(k, k-2) = 2k-3 = m$.

③ 若 $m = 4t-2$, 取奇数 $k = 2t+1$, 因 $3 \leq m \leq 2n-3$, 则 $5 < k \leq n$. 由引理 2, 存在围长为 2 的本原有向图 D_1 , 使 $\exp_{D_1}(1) = \exp_{D_1}(1, 1) = 2k-4 = m$.

④ 若 $m = 4t-3$, 取奇数 $k = 2t+1$, 因 $3 \leq m \leq 2n-3$, 则 $5 \leq k \leq n$. 由引理 3, 存在围长为 2 的本原有向图 D_2 , 使 $\exp_{D_2}(1) = \exp_{D_2}(k-1, 1) = 2k-5 = m$.

综上所述, $\{3, 4, \dots, 2n-3\} \subseteq E_n$.

定理 3 $n(\geq 3)$ 阶围长为 2 的本原有向图的最小顶点指数集 E_n : 若 n 为奇数, 则 $E_n = \{2, 3, \dots, 2n-3\}$; 若 n 为偶数, 则 $E_n = \{2, 3, \dots, 2n-4\}$.

证明 若 n 为奇数, 由引理 1、定理 1 和定理 2 可得 $E_n = \{2, 3, \dots, 2n-3\}$.

若 n 为偶数, 在引理 5 中取偶数 $k = n$, 则存在围长为 2 的本原有向图 D_4 , 使得 $\exp_{D_4}(1) = \exp_{D_4}(n-1, n-2) = 2n-4$, 因此, $2n-4 \in E_n$.

若 n 为偶数, 则 $n-1$ 为奇数, 由定理 2 有 $\{3, 4, \dots, 2(n-1)-3\} \subseteq E_{n-1}$, 即 $\{3, 4, \dots, 2n-5\} \subseteq E_{n-1}$. 而 $n-1(\geq 4)$ 为奇数时, $E_{n-1} \subseteq E_n$. 这是因为对任意 $m \in E_{n-1}$, 在定理 2 的证明中可知, 必存在一个 D_1, D_2, D_3, D_4 这 4 种情形之一的顶点集为 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的本原有向图 D' 使得 $\exp_{D'}(1) = m$. 于是在 $n-1$ 阶图 D' 的基础上添加顶点 n , 使它构成相应的 D' 所属情形的围长为 2 的 n 阶本原有向图 D , 易见 $\exp_D(1) = m$, 从而 $m \in E_n$.

因此由引理 1 和定理 1 知, 若 n 为偶数, 则 $E_n = \{2, 3, \dots, 2n-4\}$.

此外, 对于围长为 2 的本原有向图的最小顶点指数的最大值来说, 其极图在同构意义下并不是唯一的. 在引理 5 中, 取偶数 $k = n(\geq 8)$, 则有 D_4 使得 $\exp_{D_4}(1) = \exp_{D_4}(n-1, n-2) = 2n-4$. 而对 D_6 , 其中 $n(\geq 8)$ 为偶数, $V(D_6) = \{1, 2, \dots, n\}$, $V(D_6) = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), \dots, (n-1, n-2), [n-1, n], (1, 3), (1, n-2), (4, n-1)\}$. 容易验证, D_6 是围长为 2 的本原有向图, $\exp_{D_6}(1) = \exp_{D_6}(1, 1) = 2n-4$. 显然 D_4 与 D_6 不同构.

参考文献:

- [1] 柳柏濂. 组合矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 1996. 253~269.
- [2] SHAO J Y. On the exponent of a primitive digraph[J]. Linear Algebra and Its Applications 1985, 64: 21~31.
- [3] 陈小巨. 围长为 2 的本原有向图的最小顶点指数[J]. 华南理工大学学报, 2000(5): 119~121.

The Minimal Vertex Exponent Set of Primitive Digraphs with Girth 2

CHEN Xiao-gen*

Abstract: This paper discusses the minimal vertex exponent set for the class of primitive digraph. It proves that the minimal vertex exponent set of primitive digraphs of order n with girth 2 is E_n that $E_n = \{2, 3, \dots, 2n-3\}$ if n is odd and $E_n = \{2, 3, \dots, 2n-4\}$ if n is even.

Keywords: girth; primitive digraph; vertex exponent; vertex exponent set

* Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Guangdong Zhanjiang 524048, China