

山坡地分布型降雨下渗数学模型^{*}

黄 平¹, 赵吉国², 林少礼³

(1. 中山大学环境科学系, 广东 广州 510275;

2. 广东省环境监测站, 广东 广州 510045; 3. 广州市水利局, 广东 广州 510030)

摘 要: 根据山坡地的降雨下渗特性, 利用质量、能量守恒定理, 并结合坡地的地貌条件, 建立了描述山坡地潜水层水流运动规律的剖面二维偏微分方程, 采用加辽金有限元数值方法求解模型, 模拟了坡地下渗和土壤表层水流运动过程, 计算结果能够揭示山坡地产流过程和下渗过程的特点与时空变化。

关键词: 坡地; 降雨下渗; 数学模型; 有限元法

中图分类号: TV121⁺.7 **文献标识码:** A

山坡地的降雨下渗过程是一个复杂的问题, 历来备受水文研究人员的重视. 本文根据山坡地的降雨下渗特性, 利用物理学中的质量、能量守恒定理, 并结合土壤结构、地形、地貌情况, 建立了描述山坡地潜水层水流运动规律的分布型数学模型, 采用剖面二维偏微分方程描述了山坡地饱和与非饱和带水流运动的规律, 利用有限元方法离散微分方程, 模拟了研究坡地的下渗和壤中流过程, 以揭示山坡地产流过程和下渗过程的特点与时空变化。

1 剖面二维降雨下渗模型和有限元方法

根据山坡地的降雨下渗特点, 并考虑到非饱和带中, 气体运动对水流运动的影响很小. 于是, 利用质量、能量守恒定理可推导出山坡地潜水层中剖面二维的水流运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] + \frac{\partial k(\Phi)}{\partial z} = c(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1)$$

式中, Φ 为压力水头; $k(\Phi)$ 为渗透系数; $c(\Phi)$ 为容水度; x, z 分别为水平坐标和垂直坐标。

在坡地剖面二维饱和、非饱和带流的计算中, 常遇到的定解条件为

$$\Phi(x, z, t) \big|_{t=0} = \Phi_0(x, z), \quad x, z \in D \quad (2)$$

$$\Phi(x, z, t) \big|_L = \Phi_1(x, z, t), \quad x, z \in L_1 \quad (3)$$

$$\left[k \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x + k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + 1 \right) n_z \right]_{L_2} = -q(x, z, t), \quad x, z \in L_2 \quad (4)$$

$$\Phi(x, z, t) \big|_{L_3} = 0, \quad x, z \in L_3 \quad (5)$$

式中, q 表示降雨输入或其它源、漏项; $L_1 + L_2 + L_3 = L$, L 为研究区域 D 的边界; L_1, L_2 分别表示第一、二类边界的线段; L_3 为渗出面的边界, 随降雨下渗过程的变化而变化, 需要在求

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (49571015)

收稿日期: 1999-09-02; 作者简介: 黄 平 (1957~), 男, 副教授。

解过程中确定.

应用加辽金的有限元, 可以求解式(1)在上述定解条件下的近似解. 首先采用下列试探函数.

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t) \theta_i(x, z) \tag{6}$$

其中, $\varphi_i(t)$ 为与时间有关的待定系数, 也是格点处未知水头的近似值; $\theta_i(x, z)$ 为基函数.

据加辽金法应有

$$\iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[k(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + 1 \right) \right] - c(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \theta_i dx dz = 0 \tag{7}$$

将式(6)代入式(7)得

$$T\Phi + S d\Phi/dt + F = 0 \tag{8}$$

矩阵 T, S 和列向量 F 的元素为

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \iint_D k \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x} \frac{\partial \theta_j}{\partial x} + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \frac{\partial \theta_j}{\partial z} \right) dx dz; S_{ij} = \iint_D c \theta_i \theta_j dx dy; \\ F_i &= \iint_D k \frac{\partial \theta_i}{\partial z} dx dz - \iint_D q \theta_i dx dz \end{aligned} \tag{9}$$

未知列向量 Φ 的元素就是各结点待求的压力水头 Φ_i .

对式(8)中的时间导数用前差近似得

$$T_{n+1/2} \Phi_{n+1} + S_{n+1/2} \{ \Phi_{n+1}/\Delta t - \Phi_n/\Delta t \} + F_{n+1/2} = 0 \tag{10}$$

由于 T, S 和 F 的元素均依赖于 Φ , 而 Φ 又随时间变化, 下标 $n+1/2$ 表示矩阵中的元素是在 $t_n + \Delta t/2$ 时刻计值的, 或者说是由 Φ_{n+1} 来确定的. 式(9)可整理得

$$A\Phi_{n+1} = B \tag{11}$$

式中, $A = T_{n+1/2} + S_{n+1/2}/\Delta t, B = S_{n+1/2} \Phi_n/\Delta t - F_{n+1/2}$.

计算时, 先给出 $\Phi_{n+1/2}$ 的试探值 $\Phi_{n+1/2}^1$, 于是 T, S 和 F 便可确定, 式(11)可以形成, 使用直接解法便可求出 Φ_{n+1} 的第一次计算值, 记为 Φ_{n+1}^1 , 由此反过来按公式: $\Phi_{n+1/2}^2 = \{ \Phi_{n+1}^1 + \Phi_n \} / 2$ 修正 $\Phi_{n+1/2}$ 的值, 再重复上述步骤算出 Φ_{n+1}^2 等, 如此迭代到收敛, 这个时间步长的计算便告完成.

2 实验坡地和实验过程

实验坡地位于中国科学院鹤山丘陵综合实验站的马占相思人工林区坡地上. 实验站位于广东省中部的鹤山市, 东经 $112^{\circ}54'$, 北纬 $22^{\circ}41'$. 马占相思林坡地坡向东南, 坡度平均为 30° , 海拔 60 m, 相对高差 10~18 m, 整个集水区面积为 0.68 hm^2 . 坡地土壤为砂页岩发育的赤红壤. 由于人工植树对土壤的翻动, 坡地 0~20 cm 的表土疏松, 土壤孔隙大, 容重小, 对降雨的下渗率高但持水能力低; 30 cm 以下的土壤密实, 孔隙小, 容重大, 渗透性差且持水能力较高.

实验坡地设有降雨下渗及径流的观测设备 (图 1). 在距实验坡地中心 150 m 处设立有气象观测站, 采用自记雨量计记录大气降雨; 在实验坡地上布设有 16 个简易雨量筒, 记录林中的穿透雨量; 沿坡不同高程上设有几个中子水分仪测量点, 观测土壤水分变化; 在坡底设置有径流槽, 采用自记水位仪自动记录, 测量坡地的地表径流过程.

采用上述观测设备，对于观测期间的每次降雨，收集降雨量，穿透雨量，土壤水分，地表径流等数据。

3 实例计算与分析

用三角形网格剖分研究区域（见图 2），区域的高度为 14 m，坡顶至坡脚的水平距离为 22 m。为模拟坡地的壤中流，空间步长在坡地表层（深度为 30 cm 左右）用小网格，并沿深度逐渐加大网格的距离，以减少计算量；时间步长在计算中采用 1 min。

研究区域的水分参数取值情况如下：在坡地土壤表层，当 $\Phi \geq 0$ ， k 的取值为 0.4 cm/min， c 的取值为 0；当 $\Phi < 0$ ， k 的取值范围是 $8 \times 10^{-4} \sim 0.39$ cm/min， c 的取值范围是 $8 \times 10^{-4} \sim 2 \times 10^{-2}$ 。 k 、 c 与 Φ 之间的详细关系可见文 1。在土壤的中下层，当 $\Phi \geq 0$ ， k 的取值为 0.05 cm/min， c 的取值为 0；当 $\Phi < 0$ ， k 的取值范围是 $5 \times 10^{-4} \sim 0.049$ cm/min， c 的取值范围是 $4 \times 10^{-4} \sim 2 \times 10^{-3}$ 。 k 、 c 取值的规律同土壤表层相似。

每次计算时，应把雨前用中子水分仪测得的含水量数据通过事先率定的“水头—含水量”曲线，转换为压力水头值，用做初始条件。在降雨过程测得的土壤含水量数据经“水头—含水量”曲线转换后，可用于检验数值模型的水头计算值的正确程度。

对于 1996 年 8 月 31 日和 9 月 1 日的两场降雨，表 1 给出了测点 2 的水头计算值与测量值的对比，由表可知，计算值与测量值拟合良好。

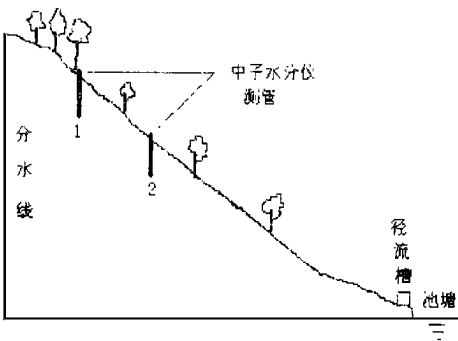


图 1 研究坡地的剖面图

Fig. 1 Sectional drawing of the hillslope

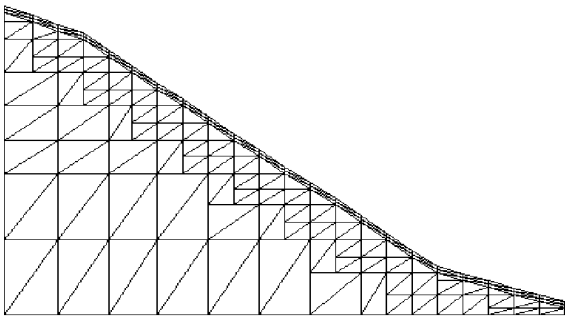


图 2 研究区域的三角形网格图

Fig. 2 Triangle numerical scheme of the hillslope section

表 1 压力水头测量值与计算值的比较

Tah 1 Measured and computed values of pressure heads

时间	项目	垂向位置/ cm								
		60	100	140	180	220	260	300	340	380
0831— 18: 00	测量值	— 24	— 47	— 95	— 130	— 160	— 180	— 200	— 210	— 220
	计算值	— 30	— 45	— 88	— 121	— 167	— 188	— 201	— 212	— 225
0901— 7: 30	测量值	— 15	— 27	— 60	— 88	— 111	— 134	— 150	— 155	— 170
	计算值	— 13	— 30	— 55	— 90	— 102	— 122	— 145	— 155	— 164

图 3 (a, b) 表示 8 月 31 日的降雨开始 1 h 及降雨停止后 0.5 h 研究剖面上水头的分布情况。由图可清楚地看出水头随时间的变化, 在图 3a 中, 雨水在整个坡地是以下渗为主, 但坡地表层已形成沿坡度的水流—壤中流。在图 3b 中, 雨水在坡地上仍以下渗为主, 但壤中流已停止, 坡地下端有地下径流向池塘流动。

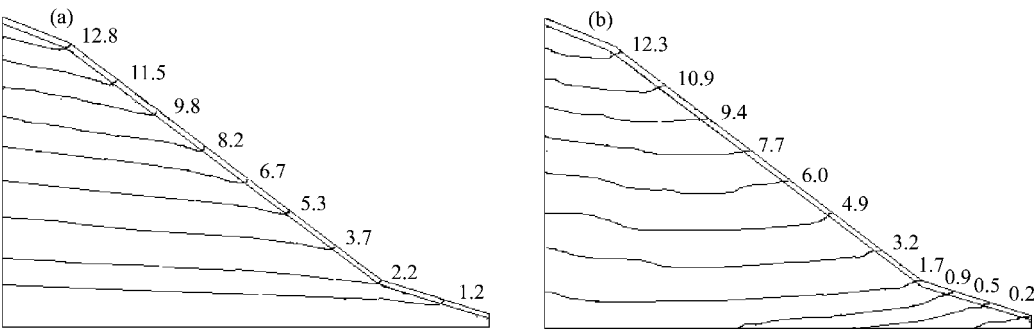


图 3 降雨开始 1 h (a) 及降雨停止后 0.5 h (b) 坡地剖面上水头的分布

Fig. 3 Distribution of head values in hillslope section at 1 hour after rainfall beginning and at 0.5 hour after rainfall stopping

表 2 给出了研究期间 8 次降雨过程中, 雨量在研究坡地上的分配情况, 其中地表径流量、地下径流量和坡地蓄水量的数据由本文的数学模型计算得到, 地表径流量数据与径流槽的测量值拟合较好, 进一步证明了数学模型的可行性。穿透雨量是指降雨穿透树林到达坡面的雨量, 它与降雨量的关系见文 [2]。

由表 2 可知, 在一次降雨中, 降雨量的 70% 左右到达坡面, 其余被树冠和坡地植被截留, 降雨量的 3% 左右形成地表径流, 0.5% ~ 1.3% 形成地下径流, 65% 左右为坡地所保持。由此可见, 森林坡地具有良好的保水性能。

表 2 雨量在坡地产流下渗过程中的分配情况

Tah. 2 Rainfall distribution in hillslope

日 期	0831	0901	0909	0919	0920 晨	0920 午	0921 晨	0921 午
降雨历时/h	3.8	0.8	1.17	0.5	3.17	0.5	0.81	1.0
降雨量/mm	38.8	16.2	5.53	12.61	15.54	4.46	2.72	9.3
穿透雨量/mm	27.1	11.2	3.73	8.70	10.75	3.13	1.91	6.45
地表径流/L	测量值	7 910	3 300	1 130	2 560	3 150	1 100	562
	计算值	7 955	3 287	1 121	2 574	3 173	1 058	578
地下径流/L								
坡地蓄水量/m ³	172.9	72.2	23.9	56.1	68.7	20.1	12.3	41.4

4 结 语

通过广东鹤山实验林坡地的实测结果和计算结果的比较, 表明了本文建立的二维降雨下渗数学模型的实用和可信。同以往常用的 Philip 和 Horton 下渗模型相比, 本模型具有能

动态表现坡地产流的过程, 能反映坡地下渗水头的时空变化情况等优点. 本模型采用有限元数值方法求解, 该方法计算速度较快, 计算结果合理, 同差分法相比, 它具有拟合边界好, 网格划分灵活等特点.

研究坡地的地表径流主要为壤中流, 在降雨中未出现过表面洼地的集水下渗情况, 有关这方面的问题有待研究.

参考文献:

- [1] 孙训正. 地下水流的数学模型和数值方法[M]. 北京: 地质出版社, 1981. 25~44.
- [2] 方炜, 丁明懋, 吕冬梅, 等. 南亚热带丘陵马占相思人工林降雨的水文动态及其营养元素迁移[J]. 生态学报, 1995, 15(增刊A): 115~122.
- [3] ORMSBEE L E, KKAN A Q. A parametric model for steeply sloping forested water sheds[J]. Water Resour Res, 1989, 25(9): 2053~2065.
- [4] 黄平, 赵吉国. 流域分布型水文数学模型的研究及应用前景展望[J]. 水文, 1997(5): 5~10.

A Study on Distributed Rainfall Infiltration Mathematics Model for Hillslope

HUANG Ping^{*}, ZHAO Ji-guo, LIN Shao-li

Abstract: A distributed model, which based on the law of conservation of mass and energy and the condition of landforms, was developed to describe the specialty of rainfall infiltration in hillslope. The finite element method was used for solving the model and simulating the infiltrating process and hillslope subsurface flow. The specialty and the change in time and space of rainfall infiltration in hillslope were showed with the simulating results.

Keywords: hillslope; rainfall infiltration; mathematics model; finite element method

^{*} Department of Environmental Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China