中山大学学报（自然科学版）
第 39 卷　第 4 期　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　Vol. 39　No. 4
2000 年　7 月　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　Jul.　2000

文章编号：0529-6579（2000）04-0005-05

一个有限维可积系统*

施齐焉，范筑军，朱思铭
（中山大学 数学系，广东 广州 510275）

摘　要：对一个特征值及其伴随特征值问题非线性化，得到一个有限维 Hamilton 系统，并得到这个系统的 Lax 表示和 r-矩阵. 通过 r-矩阵，得到 $4N$ 个函数不相关并互相对合的运动积分，由此证明了 Liouville 意义下的完全可积性.

关键词：Hamilton 系统；r-矩阵；可积性
中图分类号：O175. 24　　文献标识码：A

Lax 对的非线性化方法[1,2] 广泛应用于各种孤子方程族，得到大批有意义的 Liouville 可积的有限维 Hamilton 系统. 最近，这个方法又推广到讨论孤子方程 Lax 对及其伴随 Lax 对的非线性化[3~5].

本文对一个 4×4 特征值问题进行非线性化，并利用 r-矩阵理论证明所得到的有限维 Hamilton 系统的可积性. r- 矩阵方法是研究有限维可积系统的一个有力工具. 利用 r- 矩阵，很容易得到从 Lax 算子中产生的运动积分的对合性.

1　孤子方程族

考虑 4×4 特征值问题

$$\psi_x = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{u}, \lambda)\psi,\quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -\lambda & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & \lambda & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & \lambda & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{1}$$

这里，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ 是位势向量，λ 是一谱常数，稳态零曲率方程

$$\boldsymbol{V}_x = [\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}],\quad \boldsymbol{V} = \sum_{l\geqslant 0} \boldsymbol{V}_l \lambda^{-l},\quad \boldsymbol{V}_l = (V_{ij}^{(l)})_{4\times 4} \tag{2}$$

等价于 Lenard 形式

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}_{l-1} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_l,\ \boldsymbol{G}_{l-1} = (V_{21}^{(l)}, V_{31}^{(l)}, V_{41}^{(l)}, V_{12}^{(l)}, V_{13}^{(l)}, V_{14}^{(l)})^{\mathrm{T}},\ l \geqslant 1 \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{G}_0 = (v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$，满足条件 $\boldsymbol{G}_l\,|_{u=0} = 0$. 这里 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 是 2 个斜对称算子

* 基金项目：国家自然科学基金资助项目（19771089）
收稿日期：1999-07-09；　作者简介：施齐焉（1969～），女，博士生.

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0&-2&0&0\\0&0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&0&-2\\2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{K}=(K_{ij})_{6\times6},\ \boldsymbol{K}_{ij}^{*}=-\boldsymbol{K}_{ji}$$

其中, $K_{11}=2u_1\partial^{-1}u_1, K_{12}=u_1\partial^{-1}u_2+u_2\partial^{-1}u_1, K_{13}=u_1\partial^{-1}u_3+u_3\partial^{-1}u_1,$

$K_{14}=\partial-2u_1\partial^{-1}v_1-u_2\partial^{-1}v_2-u_3\partial^{-1}v_3, K_{15}=-u_1\partial^{-1}v_2, K_{16}=-u_1\partial^{-1}v_3,$

$K_{22}=2u_2\partial^{-1}u_2, K_{23}=u_2\partial^{-1}u_3+u_3\partial^{-1}u_2, K_{24}=-u_2\partial^{-1}v_1,$

$K_{25}=\partial-u_1\partial^{-1}v_1-2u_2\partial^{-1}v_2-u_3\partial^{-1}v_3, K_{26}=-u_2\partial^{-1}v_3, K_{33}=2u_3\partial^{-1}u_3,$

$K_{34}=-u_3\partial^{-1}v_1, K_{35}=-u_3\partial^{-1}v_2, K_{36}=\partial-u_1\partial^{-1}v_1-u_2\partial^{-1}u_2-2u_3\partial^{-1}v_3,$

$K_{44}=2v_1\partial^{-1}v_1, K_{45}=v_1\partial^{-1}v_2+v_2\partial^{-1}v_1, K_{46}=v_1\partial^{-1}v_3+v_3\partial^{-1}v_1, K_{55}=2v_2\partial^{-1}v_2,$

$K_{56}=v_2\partial^{-1}v_3+v_3\partial^{-1}v_2, K_{66}=2v_3\partial^{-1}v_3.$

特征值问题(1) 与其辅助问题

$$\psi_{t_m}=\boldsymbol{V}^{(m)}\psi,\ \boldsymbol{V}^{(m)}=\boldsymbol{V}^{(m)}(u,\lambda)=(\lambda^m\boldsymbol{V})_+,\ m\geqslant1 \tag{4}$$

的相容性条件导出零曲率方程 $\boldsymbol{U}_t-\boldsymbol{V}_x+[\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}]=0$, 这里 + 表示取 λ 的非负次幂. 它蕴含孤子方程族

$$\boldsymbol{u}_{t_m}=\boldsymbol{X}_m=\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_m,\ m\geqslant1 \tag{5}$$

2 有限维 Hamilton 系统

方程(1) 的伴随特征值问题是

$$\varphi_x=-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u},\lambda)^{\mathrm{T}}\varphi,\ \varphi=(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 是 N 个两两不同的特征值, 联系方程(1) 和(6) 的系统可写为

$$(q_l^1,q_l^2,q_l^3,q_l^4)_x=(q_l^1,q_l^2,q_l^3,q_l^4)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u},\lambda)^{\mathrm{T}}$$
$$(p_l^1,p_l^2,p_l^3,p_l^4)_x=-(p_l^1,p_l^2,p_l^3,p_l^4)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u},\lambda) \tag{7}$$

这里, $q_l^i=\psi^i(\lambda_l), p_l^i=\varphi^i(\lambda_l), 1\leqslant i\leqslant4, 1\leqslant l\leqslant N$ 是特征函数, 直接计算可得特征值 λ_l 关于位势 $\boldsymbol{u}$ 的泛函梯度

$$\nabla\lambda_l=\frac{\delta\lambda_l}{\delta\boldsymbol{u}}=\left(\frac{\delta\lambda_l}{\delta u_1},\frac{\delta\lambda_l}{\delta u_2},\frac{\delta\lambda_l}{\delta u_3},\frac{\delta\lambda_l}{\delta v_1},\frac{\delta\lambda_l}{\delta v_2},\frac{\delta\lambda_l}{\delta v_3}\right)^{\mathrm{T}}=(q_l^2p_l^1,q_l^3p_l^1,q_l^4p_l^1,q_l^1p_l^2,q_l^1p_l^3,q_l^1p_l^4)^{\mathrm{T}}$$

这个泛函梯度满足方程 $\boldsymbol{K}\nabla\lambda_1=\lambda_l\boldsymbol{J}\nabla\lambda_l$.

考虑 Bargmann 约束 $G_0=\sum_{l=1}^{N}\nabla\lambda_1$, 得 $u_1=\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^2\rangle, u_2=\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^3\rangle, u_3=\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^4\rangle, v_1=\langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^1\rangle, v_2=\langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^1\rangle, v_3=\langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^1\rangle$. 这里 $\langle\circ,\circ\rangle$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中标准内积, $\boldsymbol{q}^i=(q_1^i,q_2^i,\cdots,q_N^i)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}^i=(p_1^i,p_2^i,\cdots,p_N^i)^{\mathrm{T}}, 1\leqslant i\leqslant4$. 由方程(7) 得到一个有限维 Hamilton 系统

$$q_x^i=\partial H/\partial p^i,\ p_x^i=-\partial H/\partial q^i,\ 1\leqslant i\leqslant4 \tag{8}$$

其中, Hamilton 函数

$$H=-\langle\Lambda\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle+\langle\Lambda\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle+\langle\Lambda\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle+\langle\Lambda\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle+\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^2\rangle\langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^1\rangle+$$

$$\langle \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^3\rangle\langle \boldsymbol{q}^3, \boldsymbol{p}^1\rangle + \langle \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^4\rangle\langle \boldsymbol{q}^4, \boldsymbol{p}^1\rangle$$

这里, $\Lambda_{\boldsymbol{q}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)$.

3　r-矩阵

本节求系统(8)的 Lax 算子的 r-矩阵. 如文献[6]的计算得定理 1.

定理 1　系统(8)有如下 Lax 表示

$$\boldsymbol{L}(\lambda)_x = [\boldsymbol{M}(\lambda), \boldsymbol{L}(\lambda)] \tag{9}$$

这里, $$\boldsymbol{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} -1+\sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^1 p_k^1}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^1 p_k^2}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^1 p_k^3}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^1 p_k^4}{\lambda-\lambda_k} \\ \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^2 p_k^1}{\lambda-\lambda_k} & 1+\sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^2 p_k^2}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^2 p_k^3}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^2 p_k^4}{\lambda-\lambda_k} \\ \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^3 p_k^1}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^3 p_k^2}{\lambda-\lambda_k} & 1+\sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^3 p_k^3}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^3 p_k^4}{-\lambda_k} \\ \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^4 p_k^1}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^4 p_k^2}{\lambda-\lambda_k} & \sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^4 p_k^3}{\lambda-\lambda_k} & 1+\sum\limits_{k=1}^N \frac{q_k^4 p_k^4}{\lambda-\lambda_k} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & \langle \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^2\rangle & \langle \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^3\rangle & \langle \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^4\rangle \\ \langle \boldsymbol{q}^2, \boldsymbol{p}^1\rangle & \lambda & 0 & 0 \\ \langle \boldsymbol{q}^3, \boldsymbol{p}^1\rangle & 0 & \lambda & 0 \\ \langle \boldsymbol{q}^4, \boldsymbol{p}^1\rangle & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

利用文[7]中的记号, $\boldsymbol{L}_1(\lambda) = \boldsymbol{L}(\lambda) \otimes \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{L}_2(\mu) = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{L}(\mu)$, $\boldsymbol{I}$ 是 4×4 单位阵, $\{\boldsymbol{L}_1(\lambda), \boldsymbol{L}_2(\mu)\}$ 是一个 16×16 矩阵, $\{\boldsymbol{L}_1(\lambda), \boldsymbol{L}_1(\mu)\}_{ij,kl} = \{\boldsymbol{L}(\lambda)_{ik}, \boldsymbol{L}(\mu)_{jl}\}$. 直接计算可得定理 2.

定理 2　Lax 算子 $\boldsymbol{L}(\lambda)$ 满足如下 r-矩阵关系

$$\{\boldsymbol{L}_1(\lambda), \boldsymbol{L}_2(\mu)\} = \left[\frac{1}{\mu-\lambda}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}_1(\lambda) + \boldsymbol{L}_2(\mu)\right] \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{P}$ 是排序矩阵.

4　对合运动积分及其可积性

本节利用 r-矩阵理论得到 $4N$ 个对合运动积分, 并证明系统(8)的 Liouville 可积性.

根据 r-矩阵理论[8], 从方程(10)有

$$\{\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^n(\lambda), \mathrm{tr}\boldsymbol{L}^m(\mu)\} = 0, \ \forall n, m = 1, \cdots, 4 \tag{11}$$

对 $\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^n(\lambda)$, $n = 1, \cdots, 4$ 关于 λ 展开, 有

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{L}(\lambda) = 2 + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m-1} F_m^{(1)},$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\boldsymbol{L}(\lambda) - \mathrm{tr}\boldsymbol{L}^2(\lambda)) - \mathrm{tr}\boldsymbol{L}(\lambda) = -2 + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m-1} F_m^{(2)},$$

$$\frac{1}{6}\mathrm{tr}^3\boldsymbol{L}(\lambda) + \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^3(\lambda) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}(\lambda)\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^2(\lambda) -$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\boldsymbol{L}(\lambda) - \mathrm{tr}\boldsymbol{L}^2(\lambda)) + 2\mathrm{tr}\boldsymbol{L}(\lambda) = 2 + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m-1} F_m^{(3)},$$

$$\frac{1}{24}\mathrm{tr}^4\boldsymbol{L}(\lambda)-\frac{1}{4}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^4(\lambda)+\frac{1}{8}(\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^2(\lambda))^2-\frac{1}{4}\mathrm{tr}^2\boldsymbol{L}^2(\lambda)\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^2(\lambda)+$$
$$\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}(\lambda)\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^3(\lambda)-\frac{1}{6}\mathrm{tr}^3\boldsymbol{L}(\lambda)-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^3(\lambda)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}(\lambda)\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^2(\lambda)+$$
$$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\boldsymbol{L}(\lambda)-\mathrm{tr}\boldsymbol{L}^2(\lambda))-\mathrm{tr}\boldsymbol{L}(\lambda)=-1+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{-m-1}F_m^{(4)}$$

其中，$F_m^{(1)}=\langle\Lambda^m\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle+\langle\Lambda^m\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle+\langle\Lambda^m\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle+\langle\Lambda^m\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle$, $m\geqslant 0$, $F_0^{(2)}=2\langle q^1,p^1\rangle$,

$$F_m^{(2)}=2\langle\Lambda^m\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\sum_{l=1}^{m}\begin{vmatrix}\langle\Lambda^{l-1}\boldsymbol{q}^i,\boldsymbol{p}^i\rangle & \langle\Lambda^{m-l}\boldsymbol{q}^i,\boldsymbol{p}^j\rangle\\ \langle\Lambda^{l-1}\boldsymbol{q}^j,\boldsymbol{p}^i\rangle & \Lambda^{m-l}\boldsymbol{q}^j,\boldsymbol{p}^j\rangle\end{vmatrix},\ m\geqslant 1,\ F_0^{(3)}=3\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle$$

$$F_1^{(3)}=3\langle\Lambda\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle+\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^2\rangle\\ \langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^3\rangle\\ \langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix}-$$
$$\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^3\rangle\\ \langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix}$$

$$F_m^{(3)}=2\langle\Lambda^m\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle+\sum_{\substack{l+n=m-1\\ l,n\geqslant 0}}\left(\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^2\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^3\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle\end{vmatrix}+\right.$$
$$\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^3\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle\end{vmatrix}-$$
$$\left.\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^4\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix}\right)+$$
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}\ \sum_{\substack{l+n+s=m-2\\ l,n,s\geqslant 0}}\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^i,\boldsymbol{p}^i\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^i,\boldsymbol{p}^j\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^i,\boldsymbol{p}^k\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^j,\boldsymbol{p}^i\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^j,\boldsymbol{p}^j\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^j,\boldsymbol{p}^k\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^k,\boldsymbol{p}^i\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^k,\boldsymbol{p}^j\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^k,\boldsymbol{p}^k\rangle\end{vmatrix},\ m\geqslant 2$$

$F_0^{(4)}=-2\langle\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle$，$F_1^{(4)}=-2\langle\Lambda\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle$,

$$F_2^{(4)}=-2\langle\Lambda^2\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle-2\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix}$$

$$F_m^{(4)}=-2\langle\Lambda^m\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle-2\sum_{\substack{l+n+s=m-2\\ l,n,s\geqslant 0}}\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix}+$$
$$\sum_{\substack{l+n+s+t=m-3\\ l,n,s,t\geqslant 0}}\begin{vmatrix}\langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^t\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^t\boldsymbol{q}^2,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^t\boldsymbol{q}^3,\boldsymbol{p}^4\rangle\\ \langle\Lambda^l\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^1\rangle & \langle\Lambda^n\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^2\rangle & \langle\Lambda^s\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^3\rangle & \langle\Lambda^t\boldsymbol{q}^4,\boldsymbol{p}^4\rangle\end{vmatrix},\ m\geqslant 3$$

易见系统(8)的 Hamilton 函数可写为

$$H=F_1^{(1)}-\frac{1}{2}F_1^{(2)}-\frac{1}{2}F_1^{(3)}-\frac{1}{4}F_1^{(4)}+\frac{1}{2}F_0^{(2)}(F_0^{(1)}-\frac{1}{2}F_0^{(2)})$$

方程(11)说明了如下事实(定理 3).

定理 3　函数$\{F_m^{(i)}\}$, $1\leqslant i\leqslant 4$, $m\geqslant 0$, 两两对合, 即$\{F_k^{(i)},F_l^{(j)}\}=0$, $1\leqslant i,j\leqslant 4$,

$k, l \geqslant 0$.

简单证明可知函数

$$F_1^{(1)}, \cdots, F_N^{(1)}; F_1^{(2)}, \cdots, F_N^{(2)}; F_2^{(3)}, \cdots, F_{N+1}^{(3)}; F_3^{(4)}, \cdots, F_{N+2}^{(4)}$$

的不相关性. 由此有系统(8)的可积性并得定理 4.

定理 4　有限维 Hamilton 系统(8)是 Liouville 意义下完全可积的, 具有对合运动积分 $F_m^{(1)}, F_m^{(2)}, F_{m+1}^{(3)}, F_{m+2}^{(4)}, 1 \leqslant m \leqslant N$.

参考文献:

[1] CAO C W, GENG X G. Glassical integrable systems generated through non-linearization of eigenvalue problems [A]. In: Nonlinear physics, research reports in physics[C]. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 68～78.

[2] CAO C W. Nonlinearization of the Lax system for AKNS hierarchy[J]. Sci China A, 1990, 33: 528～536.

[3] MA W X, STRAMPP W. An explicit symmetry constraint for the Lax pairs and the adjoint Lax pairs of AKNS systems[J]. Phys Lett A, 1994, 185: 277～286.

[4] MA W X, FUCHSSTEINER B, OEVEL W. A 3×3 matrix spectral problem for AKNS hierarchy and its binary nonlinearization[J]. Physica A, 1996, 233: 331～354.

[5] GENG X G. The Hamiltonian structure and new finite-dimensional integrable system associated with Harry-Dym type equations[J]. Phys Lett A, 1994, 194: 44～48.

[6] ZENG Y B, LI Y S. The deduction of the Lax representation for constrained flows from the adjoint representation [J]. J Phys A, 1993, 26: L273～L278.

[7] FADDEEV L D, TAKHTAJAN L A. Hamiltonian methods in the theory of soliton[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 1～287

[8] BABELON O, VIALLET C M. Hamiltonian structures and Lax equations[J]. Phys Lett B, 1990, 237: 411～416.

A Finite-dimensional Integrable System

SHI Qi-yan*, FAN Zhu-jun, ZHU Si-ming

Abstract: A finite-dimensional Hamiltonian system is obtained by nonlinearization of an eigenvalue problem and its ajoint one. For the system, a Lax representation is deduced, and an *r*-matrix is established from the Lax operator. 4*N* functionally independent and involutive integrals of motion are obtained *via* the *r*-matrix, which shows that the system is completely integrable in the Liouville sense.

Keywords: Hamiltonian system; *r*-matrix; integrability

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China