

一类具有随机反射边界的随机微分方程(II)^{*}

丁灯¹, 郑小任²

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275; 2. 澳门大学科技学院, 澳门 P. O. Box 3001)

摘 要: 得到一个关于一类具有反射边界的随机微分方程解的迭代算法, 该类方程的反射边界是随机的而且随时间变化. 讨论了该数值解的逼近问题和得到了其收敛速度的一个估计.

关键词: 随机微分方程; 反射边界; 数值解

中图分类号: O211.63 **文献标识码:** A

1 数值解的构造

具有反射边界的随机微分方程解的逼近和其数值解等问题受到人们广泛的重视^[1-3]. 本文在文[4]的基础上继续讨论一类实值反射边界随机微分方程解的数值逼近问题, 其反射边界是随机的而且是随时间而变化的.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一完备的概率空间, 而 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是其上一满足通常条件的参考族. 本文总假设 $W = \{W_t; t \geq 0\}$ 是一个标准 $(\mathcal{F}_t)$ -Wiener 过程. 还假设边界过程 $S = \{S_t; t \geq 0\}$ 是连续的 $(\mathcal{F}_t)$ -适应随机过程, 而且满足条件: 存在一个有界 $(\mathcal{F}_t)$ -适应随机过程 $U = \{U_t; t \geq 0\}$ 使得, $S_t = \int_0^t U_s ds + S_0, \forall t \geq 0$. 为了方便, 本文考虑如下关于具有随机反射边界 S 的齐次随机微分方程

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t + dK_t \quad (1)$$

这里, $b(x)$ 和 $\sigma(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界可测函数且满足条件: 存在常数 $L > 0$ 使得对任意实数 x, y , $|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L|x - y|$.

根据文[4]定理 1 和定理 2, 具有随机反射边界 S 的随机微分方程(1)唯一存在关于初值为 $X_0 = x_0 \geq S_0$ 的解 $(X, K) = \{(X_t, K_t); t \geq 0\}$, 即 X 是一连续的 $(\mathcal{F}_t)$ -适应过程, K 是一连续的 $(\mathcal{F}_t)$ -适应增过程, 满足随机积分方程

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + K_t \quad (2)$$

且满足边界条件: 对任意时刻 $t \geq 0$, $X_t \geq S_t$, 和 $K_t = \int_0^t I_{\{X_s = S_s\}}(s) dK_s$, 并且这一解有如下的估计: 对于任意固定的时刻 $T > 0$, 存在正的常数 $C_{1,T}$ 使得

$$E[|X_t - X_s|^2] + E[|K_t - K_s|^2] \leq C_{1,T}|t - s|, \quad 0 \leq s < t \leq T \quad (3)$$

下面首先借助 Petterson^[1] 和 Slominski^[2] 迭代算法, 得到了一个关于方程(1)的数值解的实用迭代算法, 并在下一节中讨论其逼近问题, 在最后得到了其收敛速度的一个估

* 收稿日期: 2000-06-17; 作者简介: 丁 灯 (1959~), 男, 讲师, 兼任澳门大学助理教授.

计.

设 $\Delta: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ 是区间 $[0, T]$ 的一个分割, 并记 $\delta = \max_{1 \leq n \leq N} |t_n - t_{n-1}|$. 假设 $y^\delta(t)$ 和 $\gamma^\delta(t)$ 是 2 个关于 Δ 的右连左极阶梯函数: $y^\delta(t) = y^\delta(t_n)$ 和 $\gamma^\delta(t) = \gamma^\delta(t_n)$, $t_n \leq t < t_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, 且满足条件: $y^\delta(0) \geq \gamma^\delta(0)$.

定义 1 一对关于分割 Δ 的右连左极阶梯函数: $x^\delta(t) = x^\delta(t_n)$ 和 $\zeta^\delta(t) = \zeta^\delta(t_n)$, $t_n \leq t < t_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, 被称为是沿活动边界 $\gamma^\delta(t)$ 反射 $y^\delta(t)$ 的 Skorohod 问题的解, 如果它们满足条件: 1) 对任意 $0 \leq t \leq T$, $x^\delta(t) = y^\delta + \zeta^\delta(t)$; 2) $\zeta^\delta(t)$ 是一增函数且 $\zeta^\delta(0) = 0$; 3) 对任意 $0 \leq t \leq T$, $x^\delta(t) \geq \gamma^\delta(t)$, 而且 $\zeta^\delta(t) = \int_0^t I_{\{x^\delta(s) = \gamma^\delta(s)\}}(s) d\zeta^\delta(s)$.

下面为方便起见, 分别对 $\varphi(t) = y^\delta(t)$, $\gamma^\delta(t)$, 记 $\varphi_n = \varphi(t_n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. 记 $x_0^\delta = y_0^\delta$, $\zeta_0^\delta = 0$. 然后, 对任一 $n = 1, 2, \dots, N-1$, 令 $z_n^\delta = x_{n-1}^\delta + (y_n^\delta - y_{n-1}^\delta)$, 并定义:

$$x_n^\delta = \begin{cases} z_n^\delta, & z_n^\delta \geq \gamma_n^\delta \\ \gamma_n^\delta, & z_n^\delta < \gamma_n^\delta \end{cases} \text{ 和 } \zeta_n^\delta = \begin{cases} \zeta_{n-1}^\delta, & z_n^\delta \geq \gamma_n^\delta \\ \zeta_{n-1}^\delta + (\gamma_n^\delta - z_n^\delta), & z_n^\delta < \gamma_n^\delta \end{cases} \quad (4)$$

现在, 定义一对关于分割 Δ 的右连左极阶梯函数 $x^\delta(t) = x_n^\delta$ 和 $\zeta^\delta(t) = \zeta_n^\delta$, $t_n \leq t < t_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots, N-1$. 直接可验证如下引理:

引理 1 $(x^\delta(t), \zeta^\delta(t))$ 是一个沿活动边界 $\gamma^\delta(t)$ 反射 $y^\delta(t)$ 的 Skorohod 问题的解, 并满足如下的不等式: 对任意 $n = 1, 2, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} |x^\delta(t_n) - x^\delta(t_{n-1})| &\leq 2 |y^\delta(t_n) - y^\delta(t_{n-1})| + |\gamma^\delta(t_n) - \gamma^\delta(t_{n-1})| \\ |\zeta^\delta(t_n) - \zeta^\delta(t_{n-1})| &\leq |y^\delta(t_n) - y^\delta(t_{n-1})| + |\gamma^\delta(t_n) - \gamma^\delta(t_{n-1})| \end{aligned}$$

下面讨论方程 (1) 的数值解问题, 由随机反射边界过程 S , 定义一个关于分割 Δ 的右连左极阶梯过程 $S^\delta = \{S_t^\delta: 0 \leq t \leq T\}$: 对任意的 $t_n \leq t < t_{n+1}$ 和 $\omega \in \Omega$, $S_t^\delta(\omega) = S_{t_n}(\omega)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

现在基于函数 (4) 定义一个关于方程 (1) 数值解的迭代算法. 对任意 $\omega \in \Omega$ 记 $X_0^\delta(\omega) = X_{t_0}^\delta(\omega) = x_0$ 和 $K_0^\delta(\omega) = K_{t_0}^\delta(\omega) = x_0$; 对任意的 $n = 1, 2, \dots, N-1$, 记 $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ 和 $\Delta W_{t_n} = W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$, 并令

$$\Delta Y_{t_n}^\delta(\omega) = b(X_{t_n}^\delta(\omega))\Delta t_n + \sigma(X_{t_{n-1}}^\delta(\omega))\Delta W_{t_n}(\omega) \text{ 和 } Z_{t_n}^\delta(\omega) = X_{t_{n-1}}^\delta(\omega) + \Delta Y_{t_n}^\delta(\omega)$$

$$X_{t_n}^\delta(\omega) = \begin{cases} Z_{t_n}^\delta(\omega), & Z_{t_n}^\delta(\omega) \geq S_{t_n}^\delta(\omega) \\ S_{t_n}^\delta(\omega), & Z_{t_n}^\delta(\omega) < S_{t_n}^\delta(\omega) \end{cases} \quad (5)$$

$$K_{t_n}^\delta(\omega) = \begin{cases} K_{t_{n-1}}^\delta(\omega), & Z_{t_n}^\delta(\omega) \geq S_{t_n}^\delta(\omega) \\ K_{t_{n-1}}^\delta(\omega) + (S_{t_n}^\delta(\omega) - Z_{t_n}^\delta(\omega)), & Z_{t_n}^\delta(\omega) < S_{t_n}^\delta(\omega) \end{cases} \quad (6)$$

$$Y_{t_n}^\delta(\omega) = Y_{t_{n-1}}^\delta(\omega) + \Delta Y_{t_n}^\delta(\omega) \quad (7)$$

定义 3 个关于分割 Δ 的右连左极阶梯过程 $X^\delta = \{X_t^\delta: 0 \leq t \leq T\}$, $Y^\delta = \{Y_t^\delta: 0 \leq t \leq T\}$ 和 $K^\delta = \{K_t^\delta: 0 \leq t \leq T\}$: 对任意 $t_n \leq t < t_{n+1}$ 和 $\omega \in \Omega$, $X_t^\delta(\omega) = X_{t_n}^\delta(\omega)$, $Y_t^\delta(\omega) = Y_{t_n}^\delta(\omega)$ 和 $K_t^\delta(\omega) = K_{t_n}^\delta(\omega)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

根据引理 1, 对任意的 $\omega \in \Omega$, $(X^\delta(\omega), K^\delta(\omega))$ 是一个沿活动边界 $S^\delta(\omega)$ 反射右连左极阶梯函数 $Y^\delta(\omega)$ 的 Skorohod 问题的解. 进一步, 有如下的结论

定理 1 (X_t^δ, K_t^δ) 是方程(1)的一个数值解, 即 (X_t^δ, K_t^δ) 满足的方程

$$X_t^\delta = X_{t_n}^\delta = x_0 + \int_0^{t_n} b(X_s^\delta) ds + \int_0^{t_n} \sigma(X_s^\delta) dW_s + K_{t_n}^\delta = \\ x_0 + \sum_{k=1}^n b(X_{t_{k-1}}^\delta) \Delta t_k + \sum_{k=1}^n \sigma(X_{t_{k-1}}^\delta) \Delta W_{t_k} + \sum_{k=1}^n \Delta K_{t_k}^\delta$$

和边界条件 $X_t^\delta \geq S_t^\delta$ 和 $K_t^\delta = K_{t_n}^\delta = \int_0^{t_n} I_{\{X_s^\delta = S_s^\delta\}}(s) dK_s^\delta, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

引理 2 存在常数 $C_{0,\delta}$ 和 $C_{1,\delta}$ 使得:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E[|X_t^\delta|^2] + \sup_{0 \leq t \leq T} E[|K_t^\delta|^2] \leq C_{0,\delta}$$

和 $\sup_{1 \leq n \leq N-1} E[|X_{t_n}^\delta - X_{t_{n-1}}^\delta|^2] + \sup_{1 \leq n \leq N-1} E[|K_{t_n}^\delta - K_{t_{n-1}}^\delta|^2] \leq C_{1,\delta} \cdot \delta$

证明 根据引理 1, 对任意 $n = 1, \dots, N-1$,

$$|X_{t_n}^\delta - X_{t_{n-1}}^\delta|^2 \leq 8 |\Delta Y_{t_n}^\delta|^2 + 2 |S_{t_n}^\delta - S_{t_{n-1}}^\delta|^2 \quad (8)$$

而由已给条件, 可得

$$E[|\Delta Y_{t_n}^\delta|^2] \leq 2E[|b(X_{t_{n-1}}^\delta) \Delta t_n|^2] + 2E[|\sigma(X_{t_{n-1}}^\delta) \Delta W_{t_n}|^2] \leq 2M_C^2(T+1)\delta$$

和 $E[|S_{t_n}^\delta - S_{t_{n-1}}^\delta|^2] \leq E\left[\left|\int_{t_{n-1}}^{t_n} U_s ds\right|^2\right] \leq M_U^2 \cdot \delta$.

于是, 由式(8)马上可得: 存在一正的常数 c_δ 使得: $\sup_{1 \leq n \leq N-1} E[|X_{t_n}^\delta - X_{t_{n-1}}^\delta|^2] \leq c_\delta \cdot \delta$ 类似地, 可从引理 1 得到关于 K_t^δ 的估计式. 于是第 1 不等式得证. 类似方法不难证得第 2 不等式. 证毕.

2 数值解的逼近

下面讨论方程(1)数值解 X_t^δ 的逼近问题和其收敛速度估计. 按多项式平方公式展开可得以下引理 3.

引理 3 对任意的 $n = 1, 2, \dots, N-1$, 下面的估计式成立:

$$|X_{t_n}^\delta - X_{t_n}|^2 \leq \left| \int_0^{t_n} (\sigma(X_s^\delta) - \sigma(X_s)) dW_s \right|^2 + 2 \sum_{k=1}^n (X_{t_k}^\delta - X_{t_k}) b(X_{t_{k-1}}^\delta) \Delta t_k - \\ 2 \int_0^{t_n} (X_s^\delta - X_s) b(X_s) ds + 2 \sum_{k=1}^n (X_{t_k}^\delta - X_{t_k}) \Delta K_{t_k}^\delta - \\ 2 \int_0^{t_n} (X_s^\delta - X_s) dK_s + 2 \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=k+1}^n \sigma(X_{t_{j-1}}^\delta) \Delta W_{t_j} - \int_{t_k}^{t_n} \sigma(X_s) dW_s \right] b(X_{t_{k-1}}^\delta) \Delta t_k - \\ 2 \sum_{k=1}^n \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\sum_{j=k}^n \sigma(X_{t_{j-1}}^\delta) \Delta W_{t_j} \right) b(X_s) ds \right] + 2 \int_0^{t_n} \left(\int_s^{t_n} \sigma(X_r) dW_r \right) b(X_s) ds + \\ 2 \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=k+1}^n \sigma(X_{t_{j-1}}^\delta) \Delta W_{t_j} - \int_{t_k}^{t_n} \sigma(X_s) dW_s \right] \Delta K_{t_k}^\delta - \\ 2 \sum_{k=1}^n \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\sum_{j=k}^n \sigma(X_{t_{j-1}}^\delta) \Delta W_{t_j} \right) dK_s \right] + 2 \int_0^{t_n} \left(\int_s^{t_n} \sigma(X_r) dW_r \right) dK_s$$

下面的引理是 Pettersson^[1] 关于 Wiener 过程的连续性结果 (Lemma 4.4).

引理 4^[1] 对充分小的 δ 下面的估计式成立: $E\left[\max_{1 \leq n \leq N} \sup_{s \in [t_{n-1}, t_n]} |W_s - W_{t_{n-1}}|^2\right] =$

$O(\delta \ln(1/\delta))$.

定理 2 对充分小的 δ 下面的估计式成立:

$$\sup_{1 \leq k \leq T} E[|X_t^\delta - X_t|^2] = O\left(\sqrt{\delta \ln(1/\delta)}\right) \quad (10)$$

证明 应用 Ito 积分的性质和 Wiener 过程的独立增量性并注意到边界条件, 有

$$2 \sum_{k=1}^n (X_{t_k}^\delta - X_{t_k}) \Delta K_{t_k}^\delta - 2 \int_0^{t_n} (X_s^\delta - X_s) dK_s \leq 2 \sum_{k=1}^n (S_{t_k}^\delta - S_{t_k}) \Delta K_{t_k}^\delta + 2 \int_0^{t_n} (S_s - S_s^\delta) dK_s$$

于是由引理 3 可得: 对任意的 $n = 1, 2, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} E[|X_{t_n}^\delta - X_{t_n}|^2] &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} E[|(\sigma(X_{t_{k-1}}^\delta) - \sigma(X_s))|^2] ds + \\ &2 \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} E[(X_{t_k}^\delta - X_{t_k}) b(X_{t_{k-1}}^\delta) - (X_{t_{k-1}}^\delta - X_s) b(X_s)] ds + \\ &2 \sum_{k=1}^n E[(S_{t_k}^\delta - S_{t_k}) \Delta K_{t_k}^\delta] + 2 \sum_{k=1}^n E\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} (S_s - S_{t_{k-1}}^\delta) dK_s\right] - \\ &2 \sum_{k=1}^n \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} E[\sigma(X_{t_{k-1}}^\delta)(W_s - W_{t_{k-1}}) b(X_s)] ds\right] - 2 \sum_{k=1}^n E\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(X_{t_{k-1}}^\delta)(W_s - W_{t_{k-1}}) dK_s\right] \end{aligned} \quad (11)$$

对于上式右边第 1 项, 应用李氏条件和估计式(3), 有:

$$\begin{aligned} \text{第 1 项} &\leq 2L_T^2 \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_{t_{k-1}}|^2] ds + 2L_T^2 \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} E[|X_{t_{k-1}} - X_s|^2] ds \leq \\ &2L_T^2 \sum_{k=1}^n E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_{t_{k-1}}|^2] \Delta t_k + 2L_T^2 \cdot C_{1,T} \cdot \delta \end{aligned}$$

对于(11)式右边第 2 项, 注意到由李氏条件和 Cauchy-Schwarz 不等式, 有:

$$\begin{aligned} E[(X_k^\delta - X_{t_k}) b(X_{t_{k-1}}^\delta) - (X_{t_k}^\delta - X_s) b(X_s)] &\leq \frac{1}{2} E[|X_k^\delta - X_{t_k}|^2] + \frac{L_T^2}{2} E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_s|^2] + \\ &(E[|X_{t_k}^\delta - X_{t_{k-1}}^\delta|^2] \cdot E[|b(X_s)|^2])^{1/2} + (E[|X_s - X_{t_k}|^2] \cdot E[|b(X_s)|^2])^{1/2} \end{aligned}$$

而根据估计式(3)和引理 2, 有:

$$\begin{aligned} E[|X_{t_k}^\delta - X_{t_k}|^2] &\leq 3E[|X_{t_k}^\delta - X_{t_{k-1}}^\delta|^2] + 3E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_{t_{k-1}}|^2] + 3E[|X_{t_{k-1}} - X_{t_k}|^2] \leq \\ &3E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_{t_{k-1}}|^2] + (3C_{1,\delta} + 3C_{1,T}) \cdot \delta \\ E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_s|^2] &\leq 2E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_{t_{k-1}}|^2] + 2E[|X_{t_{k-1}} - X_s|^2] \leq \\ &2E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_{t_{k-1}}|^2] + 2C_{1,T} \cdot \delta \\ (E[|X_{t_k}^\delta - X_{t_{k-1}}^\delta|^2] \cdot E[|b(X_s)|^2])^{1/2} &+ (E[|X_s - X_{t_k}|^2] \cdot E[|b(X_s)|^2])^{1/2} \leq \\ &M_C (C_{1,\delta}^{1/2} + C_{1,T}^{1/2}) \sqrt{\delta} \end{aligned}$$

这里, M_C 是 $b(x)$ 的界, 于是可得: 存在正的常数 c_1, c_2 和 c_3 使得

$$\text{第 2 项} \leq c_1 \sum_{k=1}^n E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_{t_{k-1}}|^2] \Delta t_k + c_2 \delta + c_3 \sqrt{\delta}$$

对于(11)式右边第 3、4 项, 由估计式(3)和 Cauchy-Schwarz 不等式可得:

$$\text{第 3 项} + \text{第 4 项} \leq 0 + 2 \sum_{k=1}^n E\left[\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} U_s ds\right| \Delta K_{t_k}\right] \leq 2M_U T \cdot C_{1,T}^{1/2} \cdot \sqrt{\delta}$$

这里, M_U 是过程 U 的界. 对于(11)式右边第 5、6 项, 由引理 4 和估计式(3), 以及

Cauchy-Schwarz 不等式可得: 存在正的常数 c_4 使得,

$$\text{第 5 项} + \text{第 6 项} \leq 2(M_c^2 T + M_c C_1^{1/2} T^{1/2}) \cdot \Phi \leq c_4 \sqrt{\ln(1/\delta)}$$

这里 $\Phi = \left(E \left[\max_{1 \leq k \leq n} \sup_{s \in [t_{k-1}, t_k)} |W_s - W_{t_{k-1}}|^2 \right] \right)^{1/2}$.

把各式代入(11) 式, 得到: 存在正的常数 α, β 使得,

$$E[|X_{t_n}^\delta - X_{t_n}|^2] \leq \alpha \sum_{k=1}^n E[|X_{t_{k-1}}^\delta - X_{t_{k-1}}|^2] \Delta t_k + \beta(\delta + \sqrt{\delta} + \sqrt{\ln(1/\delta)})$$

于是, 应用关于增过程的 Bellman-Gronwall 不等式(文[2] 中 Lemma A. 1) 可得:

$$E[|X_{t_n}^\delta - X_{t_n}|^2] = O(\sqrt{\ln(1/\delta)}) \quad (12)$$

注意到 $\sup_{1 \leq i \leq T} E[|X_t^\delta - X_t|^2] \leq \max_{1 \leq n \leq N} E[|X_{t_n}^\delta - X_{t_n}|^2] + \max_{1 \leq n \leq N} \sup_{s \in [t_{n-1}, t_n)} E[|X_t^\delta - X_t|^2]$

由(12) 式和估计式(3), 马上可知(10) 式成立. 证毕.

参考文献:

- [1] PETTERSSON R. Approximations for stochastic differential equations with reflecting convex boundaries[J]. Stochastic Processes and their applications, 1995, 59: 295~308.
- [2] SLOMINSKI L. On approximation of solutions of multidimensional SDE's with reflecting boundary conditions[J]. Stochastic Processes and their applications, 1994, 50: 179~219.
- [3] KARATZAS I, SHREVE S E. Brownian motion and stochastic calculus[M]. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [4] 丁灯. 一类具有随机反射边界的随机微分方程(I)[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2000, 39(4): 31~34.

Stochastic Differential Equations with a Stochastic Reflecting Boundary (II)

DING Deng^{*}, ZHENG Shao-ren (CHIANG Sio Iam)

Abstract: An iterated algorithm for numerical solution of one class of stochastic differential equations, which has a stochastic and moving reflecting boundary, is obtained. The approximation problem of such algorithm is discussed, and an estimate of the convergence rate is obtained.

Keywords: stochastic differential equations; reflecting boundary; numerical solutions

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China