

随机环境中的独立过程^{*}

李 炜, 戴永隆
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 引进遍历性条件, 利用分析方法研究了随机环境中独立随机过程, 重点讨论马氏环境中的 0—1 分布、Poisson 分布和一般离散分布. 得到了这些分布的数学期望、方差, 证明了它们均满足大数定理.

关键词: 随机环境; 独立过程; 马氏环境; 马氏链

中图分类号: O211.62 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 02-0019-05

1 记号与定义^[1]

设 S 为有限或可列集, 称为状态空间; $Z_+ = (0, 1, \dots)$, $E = S^{Z_+}$ 称为轨道空间, ϵ 是 E 中乘积拓扑产生的 σ 代数. G 为 S 上的全体概率分布, R 是 (E, ϵ) 上全体概率分布. $\mathcal{R}$ 是 R 上的弱拓扑(弱收敛)确定的 σ 代数. Q 是 $\mathcal{R}$ 上的概率测度, $(R, \mathcal{R}, Q)$ 为环境空间. $\Omega = R \times E$, $\mathcal{F} = \mathcal{R} \times \epsilon$, 对任意 $C \in \mathcal{R}$, $A \in \epsilon$, 令

$$P(C \times A) = \int_C \eta(A) Q(d\eta)$$

视 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基本概率空间, 对任意 $A \in \epsilon$, 定义

$$P(A) = P(R \times A) = \int_R \eta(A) Q(d\eta)$$

E, E_Q, E_η 分别表示概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(R, \mathcal{R}, Q)$, (E, ϵ, η) 上数学期望, 所以,

$$E(\circ) = E_Q(E_\eta(\circ))$$

设 $x \in E$, 以 x_n 记 x 的坐标函数, 则 x_n 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上随机过程, 这个过程称为随机环境中取 S 值的随机过程. 如果对任意 n 和 $i_0, i_1, \dots, i_n$ 有

$$\begin{aligned} \eta(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n) = \\ \eta(x_0 = i_0) \eta(x_1 = i_1) \dots \eta(x_n = i_n) \\ \text{a. e. } Q - \eta \end{aligned}$$

则称该取 S 值的随机过程为随机环境中的独立过程. 设 $\eta \in R$, 令

$$\eta_n(\circ) = \eta(x_n = \circ)$$

则以 η 作为变量, η_n 是 $(R, \mathcal{R}, Q)$ 取值于 G 上的随机过程, 若该过程关于 Q 独立, 则称为独立环境.

2 马氏环境中的 0—1 分布

定理 1 独立环境中的独立过程仍是独立过程, 即对任意 n 和 $i_0, i_1, \dots, i_n$ 有

$$\begin{aligned} P(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n) = \\ P(x_0 = i_0) P(x_1 = i_1) \dots P(x_n = i_n) \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} P(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n) = \\ \int \eta(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n) Q(d\eta) = \\ \int \eta(x_0 = i_0) \eta(x_1 = i_1) \dots \eta(x_n = i_n) Q(d\eta) = \\ \int \eta(x_0 = i_0) Q(d\eta_0) \int \eta(x_1 = i_1) Q(d\eta_1) \dots \\ \int \eta(x_n = i_n) Q(d\eta_n) = \\ P(x_0 = i_0) P(x_1 = i_1) \dots P(x_n = i_n) \end{aligned}$$

由于独立环境中的独立过程仍是独立过程, 与一般的独立过程相同, 因此没有单独研究的必要. 设 $S = \{0, 1\}$, $x \in E$, x_n 是 x 的坐标函数, 则 x_n 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上随机过程, 假定对每个 $\eta \in R$, x_n 是 (E, ϵ, η) 上的独立过程, 这个过程称为随机环境中的 0—1 分布, 这当然是二项分布的推广. 考虑环境空间, 由于 G 中元素可以表示为 $(g(1), g(0))$, $g(1) + g(0) = 1$, 因此当 $g \in G$ 时, 可令 $g(1) = r$, 则 $g(0) = 1 - r$, 从而 G 与 $[0, 1]$ 是一一对应的, 于是就取 $G = [0, 1]$, 这时 $R = [0, 1]^{Z_+}$. 如果环境空间 $(R, \mathcal{R}, Q)$ 上的坐标过程为马氏过程, 则称为马氏环境. 下面研究马氏环境中的 0—1 分布, 设其转移概率 $q(r, C)$. 假定

* 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (980287)

收稿日期: 2000-04-24; 作者简介: 李炜 (1964—), 男, 博士研究生.

$q(\cdot, \cdot)$ 有平稳分布 μ , 即 $\mu(C) = \int_C q(r, C) \mu(dr)$, 以 μ 为初始分布, 于是 (μ, q) 唯一确定 $(R, \mathcal{R})$ 上的分布 Q , $(R, \mathcal{R}, Q)$ 就是所需要的环境空间^[2~5].

定理 2 x_n 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的平稳过程.

证明

$$\begin{aligned} P(x_n = 1) &= \int \eta(x_n = 1) Q(d\eta) = \\ &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} r q^n(s, dr) \mu(ds) = \\ &= \int_{[0,1]} r \mu(dr) = P(x_0 = 1) \end{aligned}$$

同理有

$$P(x_n = 0) = \int_{[0,1]} (1-s) \mu(ds) = P(x_0 = 0)$$

因此 x_n 的分布与 n 无关. 对任意取 0-1 值的序列 $i_0, i_1, \dots, i_n$ 证明

$$\begin{aligned} P(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n) &= \\ P(x_1 = i_0, x_2 = i_1, \dots, x_{n+1} = i_n) \end{aligned}$$

按定义

$$\begin{aligned} P(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n) &= \\ \int_R \eta(x_0 = i_0) \eta(x_1 = i_1) \dots \eta(x_n = i_n) Q(d\eta) &= \\ \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \dots \int_{[0,1]} \overline{r_0} \overline{r_1} \dots & \\ \overline{r_n} \mu(dr_0) q(r_0, dr_1) \dots q(r_{n-1}, dr_n) \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \overline{r_k} = \begin{cases} r_k & i_k = 1 \\ 1 - r_k & i_k = 0 \end{cases} \text{ 而}$$

$$\begin{aligned} P(x_1 = i_0, x_2 = i_1, \dots, x_{n+1} = i_n) &= \\ \int_R \eta(x_1 = i_0) \eta(x_2 = i_1) \dots \eta(x_{n+1} = i_n) Q(d\eta) &= \\ \int_{[0,1]} \mu(dr) \int_{[0,1]} \overline{r_0} q(r, dr_0) & \\ \int_{[0,1]} \overline{r_1} q(r_0, dr_1) \dots \int_{[0,1]} \overline{r_n} q(r_{n-1}, dr_n) &= \\ \int_{[0,1]} \overline{r_0} \mu(dr_0) \int_{[0,1]} \overline{r_1} q(r_0, dr_1) \dots & \\ \int_{[0,1]} \overline{r_n} q(r_{n-1}, dr_n) &= \end{aligned}$$

$$P(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n)$$

用归纳法可以证明, 对任意自然数 m 有

$$\begin{aligned} P(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n) &= \\ P(x_m = i_0, x_{m+1} = i_1, \dots, x_{m+n} = i_n) \end{aligned}$$

从而 x_n 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的平稳过程.

定理 3 对任意自然数 m 有:

$$Ex_m = \int_{[0,1]} s \mu(ds) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(x_m) &= E(x_m - Ex_m)^2 = \\ &= \int_{[0,1]} s \mu(ds) \left(1 - \int_{[0,1]} s \mu(ds)\right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} E(x_m - Ex_m)(x_{m+n} - Ex_{m+n}) &= \\ \int_{[0,1]} s \mu(ds) \int_{[0,1]} r q^{(n)}(s, dr) - & \\ \left(\int_{[0,1]} s \mu(ds) \right)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

证明 (1) 式前面已证, (2) 式利用数学期望性质可证. 只证 (3) 式, 即只须证明

$$Ex_0 x_n = \int_{[0,1]} s \mu(ds) \int_{[0,1]} r q^{(n)}(s, dr),$$

按定义

$$\begin{aligned} Ex_0 x_n &= P(x_0 = 1, x_n = 1) = \\ \int_R \eta(x_0 = 1) \eta(x_n = 1) Q(d\eta) &= \\ \int_{[0,1]} s \mu(ds) \int_{[0,1]} r q^{(n)}(s, dr) \end{aligned}$$

记 $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$, 则有以下定理 4.

定理 4

$$\begin{aligned} \sigma^2(s_n) &= n \int s \mu(ds) \left(1 - \int s \mu(ds)\right) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \\ &\quad \left[\int s \mu(ds) \int r q^{(k)}(s, dr) - \left(\int s \mu(ds) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

证明 由 (1), (2) 和 (3) 式有

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=0}^{n-1} (x_k - Ex_k)\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} E(x_k - Ex_k)^2 + \\ 2 \sum_{0 \leq k < l \leq n-1} E(x_k - Ex_k)(x_l - Ex_l) &= \\ n \int s \mu(ds) \left(1 - \int s \mu(ds)\right) + 2 \sum_{0 \leq k < l \leq n-1} & \\ \left[\int s \mu(ds) \int r q^{(l-k)}(s, dr) - \left(\int s \mu(ds) \right)^2 \right] &= \\ n \int s \mu(ds) \left(1 - \int s \mu(ds)\right) + 2 \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} & \\ \left[\int s \mu(ds) \int r q^{(1)}(s, dr) - \left(\int s \mu(ds) \right)^2 \right] &= \\ n \int s \mu(ds) \left(1 - \int s \mu(ds)\right) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) & \\ \left[\int s \mu(ds) \int r q^{(k)}(s, dr) - \left(\int s \mu(ds) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

对任意 $\eta \in R$, 因为 X_n 是 (E, ε, η) 的独立随机过程, 它的各种极限定理已经有了相当多的研究, 但随机环境中的独立过程的极限定理的研

究, 却是一个新的课题. 为此引进遍历性条件: 设 X 和 Y 为 Borel 空间, 给定 Y 在 X 上的转移概率为 $q(y, dx)$, 即对任意 $y \in Y, q(y, \cdot)$ 为 X 上的概率测度, 对任一 Borel 集 $B \in \mathcal{A}(X)$ 有 $q(\cdot, B)$ 为 Y 上的可测函数. 遍历条件:

- (1) 存在一状态 $x^* \in X$ 和一正数 a , 使对一切 $y \in Y$ 有 $q(y, x^*) \geq a$;
- (2) 存在 X 上测度 μ , 使 $\mu(X) > 0$, 对任意 $y \in Y$ 有: $q(y, \cdot) \geq \mu(\cdot)$;
- (3) 存在 X 上测度 ν , 使 $\nu(X) < 2$, 对任意 $y \in Y$, 有 $q(y, \cdot) \leq \nu(\cdot)$;
- (4) 存在一实数 $a < 1$ 使

$\sup_{y, y'} \|q(y, \cdot) - q(y', \cdot)\| \leq 2a$, 这里对 $y, y' \in Y$ 取上确界, $\|\cdot\|$ 记符号测度的变差范数;

- (5) 存在概率测度 P 及数列 $\{C_n\}$ 使 $\|q^{(n)}(y, \cdot) - P\| \leq C_n$, 对任意 $y \in Y$ 和非负整数 n 成立, 其中 C_n 与 y 无关, 且 $\sum_n C_n < \infty$.

引理 1 (a) 对于上面的遍历性条件有:
(1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (4) $\leftarrow$ (3)
 $\downarrow$
(5)

(b) 如满足遍历性条件 (1) ~ (5) 中任一, 则存在概率测度 P , 对任意 X 上的实值有界可测函数 h , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h(x) q^{(n)}(y, dx) = \int h(x) P(dx)$$

对 $y \in Y$ 一致成立.

证明 (a) (1) $\rightarrow$ (2), 定义 X 上测度, $\mu(B) = a_0 J_B(x^*)$, 对任意 $B \in \mathcal{A}(X)$, 即证 (2).

(2) $\rightarrow$ (4), 定义 X 上的符号测度, $\lambda(\cdot) = q(y, \cdot) - q(y', \cdot); y, y' \in Y$, 由 Jordan-Hahn 分解定理, 存在 X 的不交可测集 X^+ 和 X^- 使它们并为 X , 且

$$\|\lambda\| = q(y, X^+) - q(y', X^+) - q(y, X^-) + q(y', X^-) \leq 1 - \mu(X^+) - \mu(X^-) + 1 = 2 - \mu(X)$$

取 $a = \frac{2 - \mu(X)}{2}$ 即证 (4).

(3) $\rightarrow$ (4), 利用前面证明相同的记号有 $\|\lambda\| \leq \nu(X^+) + \nu(X^-) = \nu(X)$

取 $a = \frac{\nu(X)}{2}$ 即证 (4).

(4) $\rightarrow$ (5), 在证明中将利用到下面结果^[2], $\|P - Q\| = 2 \sup_{B \in \mathcal{A}(X)} |P(B) - Q(B)|$, $|\int f d\mu| \leq \|f\| \cdot \|\mu\|$ (这里 f 为 X 上实值有限可测函数), $\|q^{(n)}(y, \cdot) - q^{(n)}(y', \cdot)\| \leq 2^{-n+1} \sup_{y, y'} \|q(y, \cdot) - q(y', \cdot)\|^n$; 其中 $y, y' \in Y$. 首先证明 $q^{(n)}(y, \cdot)$ 对于变差范数是 Cauchy 序列.

$$\begin{aligned} & \|q^{(n)}(y, \cdot) - q^{(m+n)}(y, \cdot)\| = \\ & 2 \sup_B |q^{(n)}(y, B) - q^{(m+n)}(y, B)| = \\ & 2 \sup_B |\int (q^{(n)}(y, B) - q^{(n)}(y', B)) q^{(m)}(y, dy')| \leq \\ & 2 \sup_B \sup_{y'} |q^{(n)}(y, B) - q^{(n)}(y', B)| = \\ & \sup_{y'} \|q^{(n)}(y, \cdot) - q^{(n)}(y', \cdot)\| \leq \\ & 2^{-n+1} \sup_{y, y'} \|q^{(n)}(y, \cdot) - q^{(n)}(y', \cdot)\|^n \leq C_n \end{aligned}$$

(这里, $C_n = 2a^n$, 利用 (4) 的条件), 因为有限符号测度赋予变差范数为一个 Banach 空间, 因此 $q^{(n)}(y, \cdot)$ 收敛到 X 上的一个概率测度 P , 这里 P 与 y 无关, 进一步

$$\begin{aligned} & \|q^{(n)}(y, \cdot) - P(\cdot)\| \leq \\ & \|q^{(n)}(y, \cdot) - q^{(m+n)}(y, \cdot)\| + \\ & \|q^{(m+n)}(y, \cdot) - P(\cdot)\| \leq \\ & C_n + \|q^{(m+n)}(y, \cdot) - P(\cdot)\| \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow \infty$, 就得到 (5) 的证明, (a) 证完.

(b) 由 (a) 的证明, 只须证明 (5) 成立时, 结论成立即可, 对任意 X 上实值有界可测函数 h 和 $y \in Y$ 有,

$$\begin{aligned} & \left| \int h(x) q^{(n)}(y, dx) - \int h(x) P(dx) \right| \leq \\ & \|h\| \cdot \|q^{(n)}(y, \cdot) - P(\cdot)\| \leq \\ & \|h\| \cdot C_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(b) 的结论证完.

定理 5 若环境空间中转移函数 $q(r, C)$ 满足遍历条件 (1) ~ (5) 中任何一个, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int s^\mu(ds) \int r q^{(n)}(s, dr) = (\int s^\mu(ds))^2$$

证明 由引理 1 (a) 知只须证对条件 (5) 定理结论成立即可. 由条件 (5) 知有概率测度 P 使 $\|q^{(n)}(s, \cdot) - P\| \rightarrow 0$, 下证 $P = \mu$ (a. e.), 因为 μ 为 $q(s, C)$ 的平稳分布, 所以对任意 $C \in \mathcal{A}[0, 1]$ 有 $\int q^{(n)}(r, C) \mu(dr) = \mu(C)$, 上式两边对 n 取极限有

$$\int P(C) \mu(dr) = \mu(C)$$

所以

$$P(C) = \mu(C)$$

即 $P = \mu(\text{a. e.})$ 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int s^\mu(ds) \int r q^{(n)}(s, dr) = \left(\int s^\mu(ds) \right)^2$$

证毕.

$$\text{定理 6} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sigma^2(S_n) = 0$$

证明 由定理 4 和定理 5 利用数学分析方法可导出定理结论.

定理 7 如果随机过程 X_n 环境空间上的转移概率满足遍历条件 (1) 至 (5) 中任一个, 则过程服从大数定律, 即对任意 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_k - \int s^\mu(ds) \right) \right| \geq \epsilon \right) = 0$$

证明 应用车比晓夫不等式和定理 6 即证.

3 马氏环境中的 Poisson 过程及一般情形

设 $S = \{0, 1, \dots\}$, $x \in E$, x_n 是 x 的坐标函数, 则 x_n 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程.

考虑环境空间, 假定对每个 $\eta \in R$, x_n 是 (E, ϵ, η) 上的独立过程, 而且有分布 $\eta(x_n = k) = \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$, 此处 λ 是依赖 η 和 n 的非负实数.

由于 G 中的元素都可以由 λ 唯一确定, 从而 G 与 $(0, \infty)$ 是一一对应的. 于是取 $G = (0, \infty)$, 这时 $R = (0, \infty)^{\mathbb{Z}^+}$. 设 $q(\lambda, C) (\lambda \in (0, \infty), C \in \mathcal{B}(0, \infty))$ 是 $(0, \infty)$ 上的转移函数, 假定 $q(\cdot, \cdot)$ 有平稳分布 μ , 以 μ 为初始分布, 于是 (μ, q) 唯一确定 $(R, \mathcal{B})$ 上的分布 Q , $(R, \mathcal{B}, Q)$ 就是环境空间.

概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的过程 x_n 称为随机环境空间 $(R, \mathcal{B}, Q)$ 中的 Poisson 过程. 与前面类似, 可以证明 x_n 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的平稳过程.

定理 8 对任意自然数 m 有:

$$Ex_m = \int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \quad (4)$$

$$\sigma^2(x_m) = \int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \quad (5)$$

$$E(x_m - Ex_m)(x_{m+n} - Ex_{m+n}) = \int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \int_{(0, \infty)} v q^{(n)}(\lambda, dv) - \left(\int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \right)^2 \quad (6)$$

$$\text{证明} \quad Ex_m = \sum_{k=0}^{\infty} k \int_{(0, \infty)} \mu(ds)$$

$$\int_{(0, \infty)} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} q^{(m)}(s, d\lambda) =$$

$$\int_{(0, \infty)} \mu(ds) \int_{(0, \infty)} \lambda q^{(m)}(s, d\lambda) =$$

$$\int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda)$$

类似可证 (5) 式. 因 x_n 平稳, 对 (6) 只需证

$$Ex_0 x_n = \int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \int_{(0, \infty)} v q^{(n)}(\lambda, dv)$$

由定义

$$Ex_0 x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k l P(x_0 = k, x_n = l) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{(0, \infty)} \mu(d\lambda)$$

$$\int_{(0, \infty)} \frac{k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} \frac{l}{l!} v^l e^{-v} q^{(n)}(\lambda, dv) =$$

$$\int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \int_{(0, \infty)} v q^{(n)}(\lambda, dv)$$

$$\text{定理 9} \quad \sigma^2(S_n) = n \int_{(0, \infty)} v \mu(dv) +$$

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \left(\int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \right.$$

$$\left. \int_{(0, \infty)} v q^{(k)}(\lambda, dv) - \left(\int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \right)^2 \right)$$

证明 利用定理 4 证明完全类似的方法, 并利用 (5) 和 (6) 式即可证明定理结论成立.

定理 10 若 $q(\lambda, C)$ 满足遍历条件中任何一个, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \int_{(0, \infty)} v q^{(n)}(\lambda, dv) =$$

$$\left(\int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda) \right)^2$$

证明 与定理 5 证明方法一样, 可得

$$\| q^{(n)}(\lambda, \cdot) - \mu \| \rightarrow 0$$

其中, μ 为 $q(\lambda, C)$ 的平稳分布, 证毕.

$$\text{定理 11} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sigma^2(S_n) = 0$$

证明 由定理 9 及定理 10 用数学分析方法即可证定理结论.

定理 12 如果随机过程 X_n 环境空间上转移概率满足遍历条件中任一个, 则服从大数定律, 即对任意 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (x_k - \int_{(0, \infty)} \lambda \mu(d\lambda)) \right| \geq \epsilon \right) = 0$$

证明 利用车比晓夫不等式及定理 11 即证.

一般情形马氏环境中的独立过程：设 S 是任意可列集，不妨设， $S = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ ， x_n 是 x 坐标函数，则 x_n 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上随机过程。

考虑环境空间，设对每个 $\eta \in R$ ， x_n 是 (E, ϵ, η) 上的独立过程，这时 G 由下面的点集组成

$$\sum_{i \in S} r_i = 1, r_i \geq 0$$

于是 $R = G^+$ ，对 G 取弱拓扑，而 $\mathcal{G}$ 为其 σ 代数，于是 $(R, \mathcal{R}) = (G^+, \mathcal{G}^+)$ ，假定 $q(\cdot, \cdot)$ 有平稳分布 μ ，以 μ 为初始分布，于是 (μ, q) 唯一确定 $(R, \mathcal{R})$ 上分布 Q ， $(R, \mathcal{R}, Q)$ 就是所需环境空间。与前面类似，可证 x_n 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的平稳过程。

定理 13 对于任意自然数 m 有

$$EX_m = \sum_{j \in S} j \int_G r_j \mu(dg) \tag{7}$$

$$\sigma^2(x_m) = \sum_{j \in S} j^2 \int_G r_j \mu(dg) - \left[\sum_{j \in S} j \int_G r_j \mu(dg) \right]^2 \tag{8}$$

$$E(x_m - EX_m)(x_{m+n} - EX_{m+n}) = \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} \int_G j r_j \mu(dg) \int_G k r'_k q^{(n)}(g, dh) - \left[\sum_{j \in S} j \int_G r_j \mu(dg) \right]^2 \tag{9}$$

证明 因为

$$P(x_m = j) = \int \eta(x_m = j) Q(d\eta) = \int_G g(x_0 = j) \mu(dg) = \int_G r_j \mu(dg),$$

注意 $r_j = g(x_0 = j)$ ，所以

$$EX_m = \sum_{j \in S} j P(x_m = j) = \sum_{j \in S} j \int_G r_j \mu(dg)$$

类似可计算出 (8) 式。为证 (9) 式只须计算 $EX_0 x_n$ 即可

$$\begin{aligned} E(x_0 x_n) &= \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} j k \\ &\int \eta(x_0 = j, x_n = k) Q(d\eta) = \\ &\sum_{j \in S} \sum_{k \in S} j k \int_G g(x_0 = j) \mu(dg) \\ &\int_G h(x_n = k) q^{(n)}(g, dh) = \\ &\sum_{j \in S} \sum_{k \in S} \int_G j r_j \mu(dg) \int_G k r'_k q^{(n)}(g, dh) \\ &\quad (r'_k = h(x_0 = k)) \end{aligned}$$

再由 (7) 即证 (9) 成立。

用前面完全类似的方法，可得到如下定理。

定理 14 若随机过程 X_n 的环境空间上转移概率满足遍历条件中任一个，则服从大数定律。

参考文献：

[1] SOLOMON F. Random walks in a random environment [J] . Ann Prob, 1975, 3: 1~31.
[2] GEORGIN J P. Controle de chaines de Markov sur des espaces arbitraires [M] . Ann Inst. H. Poincaré' 14, sect. B, 255~277.
[3] 王汉兴，戴永隆. 马氏环境中马氏链的 Poisson 极限律 [J] . 数学学报, 1997, 40 (2): 266~270.
[4] 李炜，郭先平. 随机环境中马氏链的强大数定律 [J] . 中山大学学报 (自然科学版), 2000, 39 (3): 15~19.
[5] FOGUEL S R, The ergodic theory of Markov processes [M] . Princeton: Van Nostrand, 1969

On the Independent Process in Random Environments

LI Wei, DAI Yong-long

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Several ergodicity conditions are introduced, and the independent process in random environments is investigated by analytical method, especially the 0—1 distribution, Poisson distribution and general discrete distribution. The mathematical expectations and variances of these distributions are obtained, also the large number laws of these distributions are proved.

Keywords: random environments; independent process; Markovian environments; Markov chains