

Hilbert 空间上带跳倒向随机微分方程的解 (I) *

司徒荣, 黄 敏

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 在 Hilbert 空间中, 得到了关于柱体布朗运动与 Poisson 鞅测度之 Itô 公式, 及带跳倒向随机微分方程在关于 x 满足李氏条件及关于 t 可以无界情形下解的存在惟一性. 并给出例子说明关于 t 可以无界的一些条件是不可减弱的.

关键词: 带跳倒向随机微分方程; 适应解; Itô 公式; 李氏条件; 无界系数

中图分类号: O241.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 03-0001-04

1 引言及定义

倒向随机微分方程在随机控制、金融市场和解微分积分方程等学科中均有重要的应用^[1]. 本文先将 Yor^[2] 关于 Hilbert 空间上柱体布朗运动之 Itô 公式推广成关于柱体布朗运动与 Poisson 鞅测度之公式. 然后主要利用 Situ^[3] 之方法导出了 Hilbert 空间上带跳倒向随机微分方程在李氏条件下解的存在惟一性. 并给出了例子说明有些条件是是不可减弱的.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, K, H 是可分 Hilbert 空间. 称 $\{w(t), t \in \mathbf{R}_+\}$ 是在可分 Hilbert 空间 K 上的柱体布朗运动, 若它满足: ① $\forall t \in (\mathbf{R}_+, w(t))$ 是在 K 上的随机线性函数; ② $\forall n \in \mathbf{N}, \forall h_1, h_2, \dots, h_n \in K, \{(w(t)h_1, \dots, w(t)h_n), t \in \mathbf{R}_+\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^n$ 的布朗运动; ③ $\forall h_1, h_2 \in K, \forall t \in \mathbf{R}_+, E(w(t)h_1)(w(t)h_2) = t(h_1, h_2)$. 现设 $k(t)$ 是取值于某可测空间 $(Z, \mathcal{A}(Z))$ 的 Poisson 点过程, $N_k(ds, dz)$ 是由 $k(\cdot)$ 定义的 Poisson 计数测度, 其补偿是 $\pi(dz)ds, \pi(\cdot)$ 是 $\mathcal{B}(Z)$ 上的 σ -有限测度, $N_k(ds, dz)$ 是鞅测度, 满足 $N_k(ds, dz) = N_k(ds, dz) - \pi(dz)ds$. 令 $\mathcal{F}_t$ 是由 $w_s, k_s, s \leq t$ 所产生并完备化的 σ -代数. 记 $L^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$ 为取值于 H 且为 $\mathcal{F}_t$ -循序可测过程的全集, 并满足以下条件的集合:

$$\|x(\cdot)\|_H = \left[E \int_0^T \|x(t)\|_H^2 dt \right]^{1/2} < +\infty$$

记 $\mathcal{A}(K, H)$ 为由 K 至 H 的连续线性算子的全体. 又记

$$\mathcal{L}(K, H) \triangleq \{ \varphi \in \mathcal{A}(K, H) \mid \|\varphi\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi e_n\|_H^2 < +\infty \}$$

其中, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ 为基. 显然 $L^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$ 和 $\mathcal{L}(K, H)$ 是 Hilbert 空间. 对 $\varphi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{L}(K, H))$, 定义随机积分为

$$\int_0^T \varphi(t) dw(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \varphi(t) \tilde{e}_n d(w(t) \tilde{e}_n)$$

记 $L^2_{\pi}(\cdot)(H) = \{f(z) \text{ 是 } \mathcal{A}(Z) \text{ 可测的 } H \text{ 值函数}:$

$$\|f\| \triangleq \left[\int_Z \|f(z)\|_H^2 \pi(dz) \right]^{1/2} < \infty \}$$

记 $F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$ 为全体 H 值的 $\mathcal{F}_t$ -可料的 $f(t, z, \omega)$ 的集合, 它满足:

$$E \int_0^T \int_Z \|f(t, z, \cdot, \omega)\|_H^2 \pi(dz) dt < \infty$$

以下恒设 $b(\cdot) \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$, $\sigma(\cdot) \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{L}(K, H))$, $c(\cdot, \cdot) \in F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$.

2 Itô 公式

$$\text{设 } x_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dw_s + \int_0^t \int_Z c(s, z, \omega) N_k(ds, dz)$$

其中, w_t 是 K 上的柱体布朗运动, $k(\cdot)$ 是取值于可测空间 $(Z, \mathcal{A}(Z))$ 上的 Poisson 点过程.

引理 1 若实值函数 $f(t, x), (t, x) \in [0, T] \times H$, 存在连续、一致有界的 $\frac{\partial f}{\partial t}, Df, D^2_x f =$

* 基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目 (79790130)

收稿日期: 2000-07-21; 作者简介: 司徒荣 (1935—), 男, 教授, 博士生导师.

D^2f , 其中 $D_x f, D_x^2 f$ 分别是 f 对于 x 之一阶、二阶 Frechet 导数, 则

$$\begin{aligned} f(t, x_t) = & f(0, x_0) + \int_0^t \langle \sigma_s^* Df(s, x_s), dw_s \rangle + \\ & \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, x_s) + \langle Df(s, x_s), b_s \rangle_H + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma_s^* D^2 f(s, x_s) \sigma(s)] \right) ds + \\ & \int_0^t \int_Z \langle Df(s, x_{s-}, c(s, z, \omega)) N_k(ds, dz) + \\ & \int_0^t \int_Z (f(s, x_{s-} + c(s, z, \omega)) - f(s, x_{s-}) - \\ & \langle Df(s, x_{s-}), c(s, z, \omega) \rangle) N_k(ds, dz) \quad (1) \end{aligned}$$

其中, $\text{tr}[\sigma_s^* D^2 f(s, x_s) \sigma(s)] \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} D^2 f(s, x_s)(\sigma \tilde{e}_i, \sigma \tilde{e}_i), \langle \sigma_s^* Df(s, x_s), dw_s \rangle \triangleq \langle Df(s, x_s), \sigma_s dw_s \rangle_H$, 这里, $D^2 f$ 看作 $H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ 的线性算子.

引理 1 是文 [2] 中 Itô 公式的推广.

证明 设 $\{e_i\} \subset H$ 为基, $\{\tilde{e}_i\} \subset K$ 为基.

对 $x \in H, Q_m x \triangleq \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle_H \tilde{e}_i$, 及对 $x \in K$,

$$Q_m x \triangleq \sum_{i=1}^m \langle x, \tilde{e}_i \rangle_K \tilde{e}_i. \text{ 令}$$

$$\begin{aligned} x^m(t) = & Q_m x_0 + \int_0^t (Q_m \sigma_s Q_m) dw_s + \int_0^t Q_m b_s ds + \\ & \int_0^t \int_Z Q_m c(s, z, \omega) N_k(ds, dz) \quad (2) \end{aligned}$$

则式 (2) 是有限维的 Itô 过程, 对其运用 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} f(t, x_t^m) = & f(0, x_0^m) + \int_0^t \langle Df(s, x_s^m), \\ & (Q_m \sigma_s Q_m) dw_s \rangle + \\ & \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, x_s^m) + \langle Df(s, x_s^m), Q_m b_s \rangle_H + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \text{tr}[(Q_m \sigma_s Q_m)^* D^2 f(s, x_s^m)(Q_m \sigma_s Q_m)] \right) ds + \\ & \int_0^t \int_Z \langle Df(s, x_{s-}^m), Q_m c(s, z, \omega) \rangle N_k(ds, dz) + \\ & \int_0^t \int_Z (f(s, x_{s-}^m + Q_m c(s, z, \omega)) - f(s, x_{s-}^m) - \\ & \langle Df(s, x_{s-}^m), Q_m c(s, z, \omega) \rangle) N_k(ds, dz) \quad (3) \end{aligned}$$

由控制收敛定理, 在 (3) 式中令 $m \rightarrow \infty$, 得证式 (1) 为真.

定理 1 若实值 $f(t, x), (t, x) \in [0, T] \times H$, 存在连续的 $\frac{\partial f}{\partial t}, Df, D^2 f$; 且在任意的 $[0, T] \times H$ 的有界集内它们为有界的 (即所谓局部有

界), 则式 (1) 仍真.

3 H 值 BSDE

以下将主要利用 Sim^[3] 之方法来讨论带跳 H 值 BSDE 解的存在惟一性.

考虑下述 BSDE

$$\begin{aligned} x_t = & X + \int_t^T b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \\ & \int_t^T q_s dw_s - \int_t^T \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz) \quad (4) \end{aligned}$$

称 (x_t, q_t, p_t) 是上述 BSDE (4) 的解, 若

- 1) $(x_t, q_t, p_t) \in L^2(\mathcal{A}(0, T; H)) \times L^2(\mathcal{A}(0, T; \mathcal{L}(K, H))) \times F^2(\mathcal{A}(0, T; H));$
- 2) (x_t, q_t, p_t) 满足上述 BSDE (4).

定理 2 (先验估计). 若 $(x_t, q_t, p_t) \in L^2(\mathcal{A}(0, T; H)) \times L^2(\mathcal{A}(0, T; \mathcal{L}(K, H))) \times F^2(\mathcal{A}(0, T; H))$ 是方程 (4) 之解, 且满足:

$$\begin{aligned} \text{(H1)} \quad & (x, b(t, x, q, p, \omega))_H \leq \\ & c_1(t)(1 + |x|_H^2) + \\ & c_2(t) |x|_H (\|q\| + \|p\|) \end{aligned}$$

其中, $c_1(t), c_2(t) \geq 0$ 非随机, $\int_0^T c_1(t) dt < \infty$,

$$\int_0^T c_2(t)^2 dt < \infty, E |X|_H^2 < \infty,$$

及 $E \left[\int_0^t |b(s, x_s, q_s, p_s, \omega)| ds \right]^2 < \infty$, 则

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{t \in [0, T]} |x_t|_H^2 + \int_0^T \|q_t\|^2 dt + \right. \\ \left. \int_0^T \int_Z |p_t(z)|_{\mathcal{H}^K}^2 dz dt \right] \leq k_0 < \infty \end{aligned}$$

其中, k_0 为正常数, 只与 $E |X|_H^2, \int_0^T c_1(s) ds, \int_0^T c_2(s)^2 ds, T$ 有关.

证明 由 Itô 公式, 可证

$$\begin{aligned} E \left[|x_t|_H^2 + \frac{1}{2} \int_t^T \|q_s\|^2 ds + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_t^T \int_Z |p_s(z)|_{\mathcal{H}^K}^2 dz ds \right] \leq \\ k + E \int_t^T |x_s|_{\tilde{H}^K}^2 ds \end{aligned}$$

其中, $\tilde{c}(s) = 2c_1(s) + 4c_2(s)^2, k = E |X|_H^2 + \int_0^T 2c_1(s) ds$. 由 Gronwall 不等式有 $E |x_t|_H^2 \leq$

$$k \exp \left[\int_t^T \tilde{c}(s) ds \right] \leq k_0 < +\infty, \forall t \in [0, T].$$

再对正向 SDE 用 Itô 公式即得 $E \sup_{t \in [0, T]} |x_t|_H^2 < \infty$.

故定理 2 得证.

定理 3 设 (H1) 真, 且设

$$(H2) \quad (x_1 - x_2, b(s, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(s, x_2, q_2, p_2, \omega))_H \leq c_1(s) (\rho(|x_1 - x_2|_H^2) + c_2(s) |x_1 - x_2|_H (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|)).$$

其中, $c_1(t), c_2(t)$ 满足定理 2 的条件. $\rho(u), u \geq 0$ 为实值、连续、单调上升的凹函数, 且

$$\rho(0) = 0, \int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty$$

若 $(x_t, q_t, p_t) \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; H) \times L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{B}(K, H)) \times F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$ 是方程(4)之解, 则解在 $L^2_{\mathcal{A}}(0, T; H) \times L^2_{\mathcal{A}}(0, T; L^2(K, H)) \times F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$ 中惟一.

证明 设 $(x_t^1, q_t^1, p_t^1), (x_t^2, q_t^2, p_t^2)$ 是式 (4) 的 2 个解, 并记

$$\hat{x}_t = x_t^1 - x_t^2, \hat{b}_t =$$

$$b(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(t, x_2, q_2, p_2, \omega)$$

其余类似.

则由 Itô 公式有: $\hat{x} = \int_t^T (2\hat{x}_s, \hat{b}_s) ds - \int_t^T \|\hat{q}_s\|^2 ds - \int_t^T \hat{p}_s^2 ds + \hat{M}$. 将假设条件用上去, 并记 z_t

$$\triangleq E \left[|\hat{x}_s|_H^2 + \int_t^T \frac{1}{2} \|\hat{q}_s\|^2 + \int_t^T \frac{1}{2} \hat{p}_s^2 \right],$$

则由文 [4] 有 $z_t = 0$. 即可得证.

现在李氏条件 (关于 x) 及无界系数 (关于 t) 情形下, 讨论解的存在惟一性.

定理 4 若设 (H1.1) $|b(t, x, q, p, \omega)|_H \leq c_1(t)(1 + |x|_H) + c_2(t)(\|q\| + \|p\|)$,

$$(H3) \quad |b(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(t, x_2, q_2, p_2, \omega)|_H \leq$$

$$c_1(t) (|x_1 - x_2|_H) + c_2(t) (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|)$$

其中, $c_1(t), c_2(t)$ 满足定理 2 的条件, 且 $E |X|^2 < \infty, X \in \mathcal{H}$; 则方程(4) 存在惟一解.

引理 2 若 $f(t, \omega)$ 为 $\mathcal{H}$ -适应, H -值, 且 $E \left(\int_0^T |f(t, \omega)|_H dt \right)^2 < \infty, E |X|_H^2 < \infty, X \in \mathcal{H}$, 则存在惟一解 BSDE:

$$x_t = X + \int_t^T f(s, \omega) ds - \int_t^T q_s dw_s - \int_t^T \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz), 0 \leq t \leq T$$

利用鞅表示定理^[5], 仿照文 [3] 的证法, 不难推出引理 2 的结论. 兹从略.

定理 4 的证明 构造范数如下,

$$\|(x, q, p)\|_M^2 = \sup_{t \leq T} e^{-bA(t)} E |x_t|_H^2 + \sup_{t \leq T} e^{-bA(t)} E \int_0^T \|q_s\|^2 ds + \sup_{t \leq T} e^{-bA(t)} E \int_0^T p_s^2 ds$$

其中, $b \geq 0$ 是一待定常数, $A(t) = \int_t^T c(s)^2 ds$, 且 $c(t)^2 = c_1(t) + c_2(t)^2$.

记 $H = \{(x, q, p) \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; H) \times L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{B}(K, H)) \times F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H);$

$\|(x, q, p)\|_M < \infty$, 则 H 是 Hilbert 空间.

对任意给定的 $(x^i, \bar{q}^i, \bar{p}^i) \in H, i = 1, 2$, 由引理 2 知, 存在惟一的 $(\hat{x}^i, \hat{q}^i, \hat{p}^i), i = 1, 2$, 是下面 BSDE 解:

$$\hat{x}_t^i = X + \int_t^T b(s, \bar{x}_s^i, \bar{q}_s^i, \bar{p}_s^i, \omega) ds - \int_t^T \hat{q}_s^i dw_s - \int_t^T \int_Z \hat{p}_s^i(z) N_k(ds, dz)$$

有

$$E \left[|x_t^1 - x_t^2|_H^2 + \int_t^T \|p_s^1 - p_s^2\|^2 ds + \int_t^T \|q_s^1 - q_s^2\|^2 ds \right] \leq k E \int_t^T |x_s^1 - x_s^2|_H^2 c(s)^2 ds + \frac{1}{k} E \left[\int_t^T c_1(s) |\bar{x}_s^1 - \bar{x}_s^2|_H^2 ds + \int_t^T \|\bar{q}_s^1 - \bar{q}_s^2\|^2 ds + \int_t^T \|\bar{p}_s^1 - \bar{p}_s^2\|^2 ds \right]$$

可证明 $\|(x^1 - x^2, q^1 - q^2, p^1 - p^2)\|_M^2 \leq k' \|\bar{x}^1 - \bar{x}^2, \bar{q}^1 - \bar{q}^2, \bar{p}^1 - \bar{p}^2\|_M^2$.

取适当的 $k' < 1$, 由压缩映像原理可知, 存在惟一的不动点 (x_t, q_t, p_t) 满足(4). 证完.

现举例说明, 在无穷维情形, $c_1(t), c_2(t)$ 所满足的条件不能减弱.

例 1 (条件 $\int_t^T c_2(t)^2 dt < \infty$ 不可以减弱). 设 $\pi(U) < \infty$, 及

$$\bar{q}_s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} s^{-1/3} I_{s \neq 0} e_k,$$

$$\tilde{p}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2^k}} s^{-1/3} e_k I_{s \neq 0} I_U(z),$$

$$c^2(s) = s^{-3/4} I_{s \neq 0}, b(s, \tilde{x}, \tilde{q}, \tilde{p}) = c_2(s) \tilde{q}_s,$$

$$X = \int_t^T \tilde{q}_s dw_s + \int_t^T \int_Z \tilde{p}_s(z) N_k(ds, dz)$$

若 (4) 存在解, 则必是:

$$x_t = E[x_t | \mathcal{H}_t] =$$

$$\int_t^T s^{-(3/4+1/3)} I_{s \neq 0} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2^k}} e_k ds +$$

$$\int_0^t \tilde{q}_s dw_s + \int_0^t \int_Z \tilde{p}_s(z) N_k(ds, dz)$$

但此时, 却有 $E x_0 |_{\mathcal{H}} = \int_0^T s^{-13/12} I_{s \neq 0} ds = +\infty$,

且 $E x_0 |_{\mathcal{H}} \geq E |x_0|_{\mathcal{H}} = \infty$, 这是不合理的, 故方程(4) 无解. 然而, 若令 $c_2(s) = s^{-\alpha} I_{s \neq 0}$, $\alpha < 1/2$, 则上述 BSDE 存在惟一解.

例 2 (条件 $\int_t^T c_1(t) dt < \infty$ 不可以减弱). 设

$y \neq 0, y \in H$ 为任一给定点, 且 $y_i \triangleq (y, e_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, x$ 则 BSDE

$$x_t = y + \int_t^T s^{-3/2} I_{s \neq 0} x_s ds - \int_t^T q_s dw_s -$$

$$\int_t^T \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz), 0 \leq t \leq T$$

无解. 若不然,

$$E x_i(0) = y_i \exp \left(\int_t^T s^{-3/2} I_{s \neq 0} ds \right) = +\infty$$

故 $E |x(0)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} E |x_i(0)|^2 = +\infty$.

这是不合理的, 然而, 若令 $c_1(s) = s^{-\alpha} I_{s \neq 0}$, $\alpha < 1$, 则上述 BSDE 存在惟一解.

参考文献:

- [1] SITU R. Backward Stochastic differential equations with jumps and applications[M]. Guangzhou: Guangdong Science & Technology Press, 2000.
- [2] YORM. Existence et unicite de diffusions a valeurs dans un espace de Hilbert[J]. Ann Inst Henri Poincare, 1974, 10: 55-88.
- [3] SITU R. On solutions of backward stochastic differential equations with jumps and applications[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1997, 66: 209-236.
- [4] SITU R. On strong solution, uniqueness, stability and comparison theorem for a stochastic system with Poisson jumps[A]. In: Lecture Notes in Control & Inform Sci, 75, Distributed Parameter System. Berlin: Springer, 1985. 352-381.
- [5] 司徒荣, 许浣耀. Hilbert 空间上带跳半线性倒向随机发展方程的适应解[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2001, 40(1): 1-5.

On Solutions of Backward Stochastic Differential Equations with Jumps in Hilbert Space (I)

SITU Rong, HUANG Min

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Itô's formula is obtained for the cylindrical Brownian motion process and Poisson martingale measure in Hilbert space. An existence and uniqueness result for solutions of BSDE with jumps in Hilbert spaces with Lipschitz condition (for x) and unbounded (for t) coefficients is proved. Some examples are given to show such unbounded conditions (for t) cannot be weakened.

Keywords: backward stochastic differential equation with jumps, Itô's formula; adapted solutions; Lipschitz condition; unbounded coefficients