

半充液自旋稳定卫星的一个实验模型^{*}

刘 守 圭

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 构造刚体—小球力学实验模型, 用以模拟充液卫星内液面的晃动对卫星自旋稳定性的影响. 通过大系统加权 V 函数方法分析了系统的稳定性, 并求得其稳定判据.

关键词: 稳定性; 大系统; 自旋稳定卫星

中图分类号: O317 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 02-0016-03

空腔充液卫星模型是诸多复杂结构飞行器中的一种数学模型. 由于腔内液体相对腔体的运动、特别是半充液状态时液体自由面的晃动, 导致系统具有无穷多自由度. 而这样的混合系统要由常微分方程与偏微分方程来描述, 直接应用这些方程来研究系统的稳定性和控制问题是极其困难的. 本文尝试构造一个简明有效的力学实验模型, 并得到与前人一致的自旋稳定性判据.

1 空腔充液卫星的基本方程

将空腔充液卫星视为一个力学系统, 由变分原理, 可求出完整、理想系统的 Lagrange 方程与理想流体动力学的 Euler 方程, 再考虑均匀不可压缩条件, 则有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

其中, $T = T(t, q_j, \dot{q}_j, x_i, \dot{x}_i)$ 为系统动能; $q_j, \dot{q}_j$ 分别为腔体的广义坐标与广义速度; $x_i, \dot{x}_i$ 分别为液体质点的坐标与相对于腔体的相对速度; $\mathbf{v}$ 为液体质点的绝对速度; $\mathbf{w}$ 为腔体的绝对角速度; $\mathbf{F}$ 为作用在流体质点上的主动力; Q_j 为广义力; P 为液体表面的压力; ρ 为液体密度.

(1), (2) 及 (3) 式联立的常微分与偏微分方程组加之相应的初始条件与边界条件描述的是一个无穷多自由度的混合系统. 一般情况下, 其求解本身就是极其困难的, 更不要说稳定性分析. 因而构造一个等效系统是十分有意义的.

2 力学实验模型的基本方程

为了研究半充液时, 液体自由面的晃动对卫星自旋运动稳定性的影响, 本文构造了一个刚体—小球的模型, 用小球在腔体的旋转抛物面上的自由运动来模拟液面的晃动. 而液体的非晃动部分与腔体设为凝固的等效刚体称为本体. 通过对该 5 自由度系统的稳定性分析, 达到将无限自由度系统的问题转化为有限自由度系统的问题. 其中“有效性”是关键.

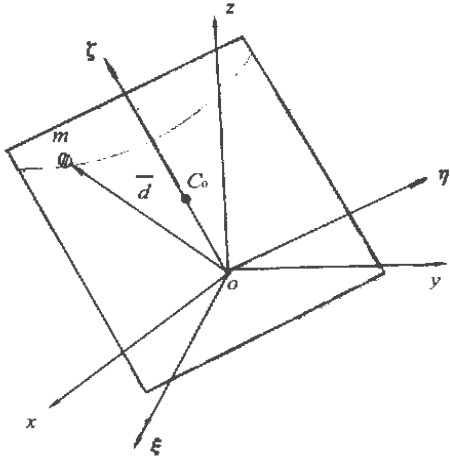


图 1 实验模型

Fig 1 Test model

设 $o-xyz$ 为惯性参考坐标系, 与质量为 m 的本体固结的主轴坐标系为 $o-\xi\zeta$. 设本体的重心 C_0 在 $o\xi$ 轴上, 与 O 点距离为 Z_0 , 作定点运动的本体角速度为 $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}$ 在主轴坐标系上的分量分别为 p, q 及 r , 本体相对主轴坐标系的惯性张量为 $\mathbf{J}$. 小球的质量为 m , 矢径为 $\mathbf{d} (x, y,$

^{*} 基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (001180)

收稿日期: 2000-09-02; 作者简介: 刘守圭, (1946—), 女, 副教授.

$z)$, 相对主轴坐标系的速度为 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 与 $\dot{z}$. 又设 α 轴铅垂, 与主轴坐标系的方向余弦分别为 α , β 及 φ .

又设本体关于主轴 $o\zeta$ 对称, 其惯性张量为

$$J = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \tag{4}$$

如此构造的系统动能为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{w} \circ J \circ \dot{w} + m \cdot \dot{d} \circ \dot{d}) = \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + m((\dot{x} + q\dot{r} - r\dot{y})^2 + (\dot{y} + r\dot{x} - p\dot{z})^2 + (\dot{z} + p\dot{y} - q\dot{x})^2)) \tag{5}$$

设系统受有理想、完整约束, 该系统的基本动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}} - r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - q \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = Mgz_0\beta + mg(\beta_z - \varphi_y) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - p \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - r \frac{\partial T}{\partial \dot{p}} = -Mgz_0\alpha + mg(\varphi_x - \alpha) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - q \frac{\partial T}{\partial \dot{p}} - p \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = mg(\alpha_y - \beta_x) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -mg\alpha \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = -mg\beta \end{cases} \tag{6}$$

另有自由面方程^[1]

$$z = h + \frac{w^2}{2g}(x^2 + y^2) \tag{7}$$

其中, h 为液面最低点到 o 点距离. 此外, 还有 Poisson 方程

$$\begin{cases} \alpha = \beta r - \varphi q \\ \beta = \varphi p - \alpha r \\ \varphi = \alpha q - \beta p \end{cases} \tag{8}$$

(6) 及 (8) 式与给定的初始条件构成系统的数学模型.

3 力学模型绕铅垂 α 轴的自旋稳定性

将式 (6) 中的最后 2 个方程代入第 3 个方程, 并考虑 (8) 式, 可有

$$\dot{r} + (B - A)pq = 0 \tag{9}$$

若本体关于 $o\zeta$ 轴对称, 也即 $A = B$. 由 (9) 式有 $\dot{r} = 0$ (10)

称 (6), (8) 式为无扰运动方程, 并考虑 (10) 式. 讨论无扰运动绕 oz 轴自旋时的一组特解(零解)

$$\begin{aligned} p &= 0, q = 0, r = w = \text{const}, \\ x &= 0, y = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \varphi = 1 \end{aligned}$$

则受扰运动为

$$\begin{aligned} p &= p, q = q, r = w + r_1, x = x, y = y, \\ \alpha &= \alpha, \beta = \beta, \varphi = 1 + \delta \end{aligned} \tag{11}$$

代入无扰运动方程, 可求出对应的受扰运动方程.

对受扰运动方程进行如下简化: 舍去关于 $p, q, r, \alpha, \beta, \delta, \dot{y}$ 及 $\dot{x}$ 的高阶小量. 同时假设 mx^2 或 my^2 均远小于 A 或 C , 则简化后的受扰运动方程为

$$\begin{cases} Ap + (C - B)qw = (Mgz_0 + W_1)\beta \\ Bq + (A - C)pw = -(Mgz_0 + W_1)\alpha \\ r_1 = 0 \\ \alpha = \beta w - q \\ \beta = p - \alpha w \\ \dot{\delta} = 0 \\ x = x_1 \\ x_1 = 2wy_1 + 2wxr_1 + w^2x - wpz - qz - g\alpha \\ y = y_1 \\ y_1 = -2wx_1 - 2wyr_1 + w^2y - wq - pz - g\beta \end{cases} \tag{12}$$

(12) 式中的 W_1 是与系统参数有关的定积分^[2]

$$W_1 = mw^2(x^2 + y^2) = \int_0^{R_0} \pi w^2 R^3 \rho dR \tag{13}$$

其中, R_0 为圆柱形本体的半径, ρ 为液体的密度.

在自旋卫星的姿态稳定问题中, 人们感兴趣的只是自旋轴的方位以及非自旋轴的扰动转速, 因此稳定性分析归结为关于 (12) 式中的 p, q, r_1, α 及 β 的零解稳定问题. 由于有 $\alpha^2 + \beta^2 + \varphi^2 = 1$ 的约束, 若 α, β 零解稳定, 可保证自旋轴的铅垂稳定 ($\varphi = 1$ 稳定).

根据部分变量稳定性的定义以及相应的定理^[1], 在不讨论除部分变量 p, q, r_1, α 及 β 之外的其他变量的稳定性时, (12) 式中的后 5 个方程将不参与构成 V 函数.

以下是用大加权 V 函数方法^[3] 将 (12) 式视为一个“大系统”, 并按以下方式进行子系统分块: 第 1 与第 4 个方程构成第 1 个子系统 S_1 .

解耦 S_1 为

$$\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{Z}_1 = -\begin{pmatrix} p \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (14)$$

耦合函数为

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} ((A-C)wq + (MgZ_0 + W_1)\beta)/A + p \\ \beta w - q + \alpha \end{pmatrix} \quad (15)$$

第 2 与第 5 个方程构成第 2 个子系统 S_2 . 解耦 S_2 为

$$\mathbf{Z}_2 = -\mathbf{Z}_2 = -\begin{pmatrix} q \\ \beta \end{pmatrix} \quad (16)$$

耦合函数为

$$\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} ((C-A)pw + (MgZ_0 + W_1)\alpha)/A + q \\ p - \alpha w + \beta \end{pmatrix} \quad (17)$$

第 3 个方程表征第 3 个子系统 S_3 . 解耦 S_3 为

$$\mathbf{Z}_3 = -\mathbf{Z}_3 = -r_1 \quad (18)$$

耦合函数为

$$\mathbf{h}_3 = r_1 \quad (19)$$

按以上方式划分了子系统以后, 对每个子系统构造 V 函数. 首先对第 1 个子系统如下构造: 对解耦 S_1 构造

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_1^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_1 \quad (\mathbf{D} \text{ 为 } 2 \times 2 \text{ 对称阵}) \quad (20)$$

且有

$$\mathbf{V}_1 = -\mathbf{Z}_1^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_1 \quad (21)$$

$$(\text{grad } V_1)^T \mathbf{h}_1 = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{D} \mathbf{h}_1 \quad (22)$$

同理有

$$V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_2^T \mathbf{E} \mathbf{Z}_2 \quad (\mathbf{E} \text{ 为 } 2 \times 2 \text{ 对称阵}) \quad (23)$$

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{Z}_2^T \mathbf{E} \mathbf{Z}_2 \quad (24)$$

$$(\text{grad } V_2)^T \mathbf{h}_2 = \mathbf{Z}_2^T \mathbf{E} \mathbf{h}_2 \quad (25)$$

$$V_3 = r_1^2/2 \quad (26)$$

$$\mathbf{V}_3 = -r_1^2 \quad (27)$$

$$(\text{grad } V_3) \mathbf{h}_3 = r_1^2 \quad (28)$$

令 $V = V_1 + V_2 + V_3$ 为整个系统 (12) 的试验函数, 若 $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ 正定, 则 V 关于部分变量 p, q, r_1, α 及 β 也为正定函数.

将 V 关于全系统求导

$$\dot{V} = -\mathbf{Z}_1^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{Z}}_1 - \mathbf{Z}_2^T \mathbf{E} \dot{\mathbf{Z}}_2 - r_1^2 + \mathbf{Z}_1^T \mathbf{D} \mathbf{h}_1 + \mathbf{Z}_2^T \mathbf{E} \mathbf{h}_2 + r_1^2 \quad (29)$$

若能找到正定的 $\mathbf{D}$ 及 $\mathbf{E}$ 并使 $\dot{V}$ 为零, 则可以肯定系统 (12) 关于部分变量稳定.

将 (29) 式展开合并同类型并考虑 (29) 为零以及 $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ 正定的条件, 可得稳定性判据为

$$w^2 > 4 \frac{A}{C^2} [MgZ_0 + W_1] \quad (30)$$

其中, W_1 的意义由 (13) 式定义, 其值由小球质量 m 、圆柱形本体的半径以及液体的密度确定. 而该模型的“有效性”也可由这些参数来调整.

稳定判据 (30) 可与前人结果进行比较:

(1) 当无自由表面 ($m = 0$) 时, 文 [1] 中全充液卫星的自旋稳定条件为

$$w^2 > \frac{MgZ_0}{C-A}$$

当 $C \geq 2A$ 时, 判据 (30) 与上式有以下关系:

$$w^2 > \frac{MgZ_0}{C-A} \geq 4 \frac{A}{C^2} MgZ_0$$

由上式看出, 本文稳定判据更少保守些.

(2) 当有自由表面时, 数值结果^[2]表明本判据与文 [1] 结果吻合性很好.

参考文献:

- [1] МОЙСЕЕВ Н.Н., РУМЯНЦЕВ В.В. Динамика тела с полостями жидкостб [J]. Наука, 1965: 202.
- [2] 刘守圭. 空腔全充液和半充液卫星的等效系统及其姿态稳定性 [D]. 北京: 清华大学, 1983. 99-101.
- [3] 刘守圭. 全充液卫星 Lagrange 情况的自旋稳定判据 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 1995, 34(4): 7-12.

A Test Model of Spinning-Satellites with Partially Liquid-Filled Tanks

LIU Shou-gui

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A model of rigid body-small ball is constructed to simulate the impact of free-surface motion on the stability of spinning-satellite. The stability criterion of spinning-satellite with partially liquid-filled tank is obtained using the method of large-scale system with weighted V function.

Keywords: stability; large-scale system; stable; spinning-satellite