

关于 Grünbaum 的一个猜想^{*}

苑立平

(河北师范大学数学系, 河北 石家庄 050016)

摘 要: 证明了平面上由闭三角形的平移构成的集族, 若其中任意两个集合相交, 则该集族具有 Π^3 性质.

关键词: Π^n ; 紧凸集; 平移; 半空间

中图分类号: O157.3 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2001) 06-0104-03

称给定的集族 $\mathcal{S}$ 具有 Π^n 性质 (又称是 n -可穿刺的), 若存在一个 n -集, 使得集族 $\mathcal{S}$ 中的任一集合均含该 n -集的至少一个点. 若给定集族 $\mathcal{S}$ 的任一含至多 k 个集合的子集族具有 Π^n 性质, 则称集族 $\mathcal{S}$ 具有 Π_k^n 性质. Grünbaum^[1] 提出如下猜想: 由平面上的紧凸集的平移构成的集族, 若其中任意两个集合相交, 则该集族具有 Π^3 性质. 本文将讨论紧凸集为闭三角形的情形. 首先介绍一些术语与记法 (见文 [2]):

- (1) x^+ 与 x^- 分别表示直线 x 界定的 2 个闭半空间, 且 $x^+ \cap x^- = x$;
- (2) 2 个半空间称为相关的, 若其中一个是另外一个的平移;
- (3) x^+, y^+ 为相关的闭半空间, 则 $x^+ \subsetneq y^+ \Leftrightarrow x^+ \subseteq y^+$ 且 $x^+ \neq y^+$;
- (4) l_{AB} 表示通过点 A 和点 B 的直线.

定理 对于由给定闭三角形的平移形成的集族, $\Pi_2^3 \Rightarrow \Pi^3$.

证明 设给定的闭三角形为 $\triangle ABC = \bigcap_{i=1}^3 l_i^+$, 其中, $l_2 \cap l_3 = A, l_3 \cap l_1 = B, l_1 \cap l_2 = C$. 记 $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$ (图 1).

令集族 $\mathcal{S}$ 为由 $\triangle ABC$ 的平移构成的集族, 且具有 Π_2^3 性质, 以下证明 $\mathcal{S}$ 具有 Π^3 性质. 任取 $S \in \mathcal{S}$ 记

$$S = l_1^+(S) \cap l_2^+(S) \cap l_3^+(S)$$

其中, $l_i^+(S)$ 与 l_i^+ 相关 ($i = 1, 2, 3$). 由于 $\mathcal{S}$ 中任二元必相交, 故 $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} l_i^+(S)$ 必有界. 令

$$l_i^+ = \max \{ l_i^+(S) : S \in \mathcal{S} \}$$

且不妨设

$l_i^+(S_i) = l_i^+ (i = 1, 2, 3)$
记 $\triangle_{A_1 B_1 C_1} = \bigcap_{i=1}^3 l_i^+(S_i)$, 则 $\triangle_{A_1 B_1 C_1} \sim \triangle ABC$
且 $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \subseteq \triangle_{A_1 B_1 C_1}$.

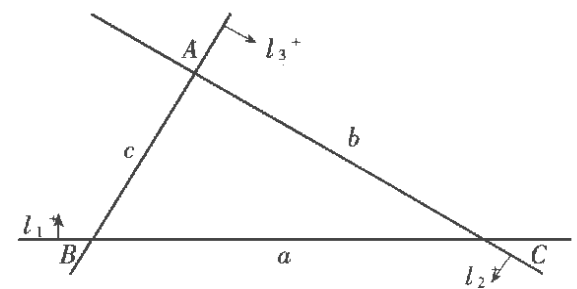


图 1 三角形 ABC
Fig 1 Triangle ABC

在 $\triangle_{A_1 B_1 C_1}$ 中, 设 $|B_1 C_1| = a_1, |C_1 A_1| = b_1, |A_1 B_1| = c_1$, 令 $a_1/a = b_1/b = c_1/c = \lambda$, 则易见 $\lambda \geq 1$.

情形 1 $\lambda = 1$

此时 $\mathcal{S} = \{ \triangle ABC \}$ 为一平凡情形, 定理显然成立.

情形 2 $1 < \lambda \leq 2$

如图 2 所示, $\triangle_{A_1 B_1 C_1}$ 中, D_1, E_1, F_1 分别 $A_1 B_1, B_1 C_1, C_1 A_1$ 的中点, P_1, P_2, P_3 分别为 $D_1 E_1, E_1 F_1, F_1 D_1$ 的中点, 且 $P_1 P_2$ 所在直线交 $A_1 B_1$ 于 M_1 , 交 $A_1 C_1$ 于 N_1 . 现任取 $S \in \mathcal{S}$

1) $l_1(S)$ 在 $l_{B_1 C_1}$ 和 $l_{M_1 N_1}$ 之间. 由于 $|M_1 B_1| = c_1/4 = \lambda c/4 \leq c/2$, 记 $M_2 N_2 = S \cap M_1 N_1$, 则 $|M_2 N_2| \geq a/2$, 而 $|M_1 P_1| = |P_1 P_2| = |P_2 N_1| = a/4 \leq a/2$ 故有 $M_2 N_2 \cap \{ P_1, P_2 \} \neq \emptyset$

* 基金项目: 河北省自然科学基金资助项目 (199174)

收稿日期: 2001-03-21; 作者简介: 苑立平 (1973-), 女, 博士生.

ϕ , 即 $S \cap \{P_1, P_2, P_3\} \neq \phi$.

2) $l_1(S)$ 在 $l_{M_1N_1}$ 与 $l_{D_1F_1}$ 之间, 此时记 $D_2F_2 = S \cap D_1F_1$, 易见 $|D_2F_2| \geq a/2$. 而由 $|D_1P_3| = |P_3F_1| \leq a/2$ 立即可得 $P_3 \in D_2F_2$, 亦即 $S \cap \{P_1, P_2, P_3\} \neq \phi$.

又易见 $l_1(S)$ 不会落在 B_1C_1 的下方或 D_1F_1 的上方, 综上所述可得 $1 < \lambda \leq 2$ 时集族 $\mathcal{S}$ 具有 Π^3 性质.

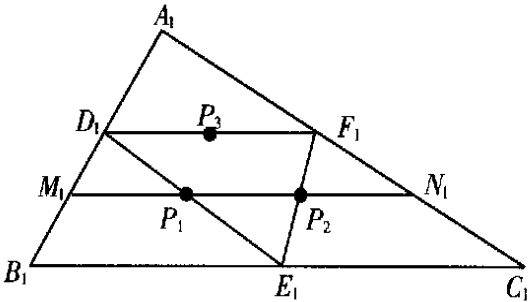


图 2 $1 < \lambda \leq 2$ 情形
Fig 2 Case of $1 < \lambda \leq 2$

情形 3 $2 < \lambda < 3$

不妨设 $a_1 = 2a + a_0$, $b_1 = 2b + b_0$, $c_1 = 2c + c_0$, 其中, $0 < a_0 < a$, $0 < b_0 < b$, $0 < c_0 < c$.

如图 3 所示, 在 B_1C_1 上分别取点 B_2, C_2 , 使得 $|B_1B_2| = |C_1C_2| = a$, 过 C_2 作 $C_2C_3 \parallel A_1C_1$ 交 A_1B_1 于 C_3 , 过 B_2 作 $B_2B_3 \parallel A_1B_1$ 交 A_1C_1 于 B_3 , 取 C_2C_3, B_2B_3 的中点 P_2, P_3 , 另在 A_1B_1 上取点 M_1 , 使得 $|M_1B_1| = c$, 过 M_1 作 $M_1N_1 \parallel B_1C_1$ 交 A_1C_1 于 N_1 , 取 M_1N_1 的中点 P_1 , 记 P_2P_3 所在直线交 A_1B_1 于 E_1 , 交 A_1C_1 于 F_1 .

现任取 $S \in \mathcal{S}$, 由于 $S \cap S_1 \neq \phi$, 故 $l_1(S)$ 必在直线 B_1C_1 与直线 M_1N_1 之间.

1) $l_1(S)$ 在 $l_{B_1C_1}$ 与 $l_{E_1F_1}$ 之间. 此时记 $E_2F_2 = S \cap E_1F_1$, 则 $|E_2F_2| \geq \frac{a-a_0}{2}$. 由于 $\mathcal{S}$ 中任二元必相交, 故 $l_{C_2C_3} \subseteq l_2^+(S)$, $l_{B_2B_3} \subseteq l_3^+(S)$, 易见 $l_2(S) = l_{C_2C_3}$ 时, $P_2 \in E_2F_2$, $l_3(S) = l_{B_2B_3}$ 时 $P_3 \in E_2F_2$, 且 $|P_2P_3| = \frac{a-a_0}{2} \leq |E_2F_2|$, 故而可得 $E_2F_2 \cap \{P_2, P_3\} \neq \phi$, 因此 $S \cap \{P_1, P_2, P_3\} \neq \phi$.

2) $l_1(S)$ 在 $l_{E_1F_1}$ 与 $l_{M_1N_1}$ 之间. 此时记 M_2N_2

$= S \cap M_1N_1$, 则 $|M_2N_2| \geq \frac{a+a_0}{2}$, 而 $|M_1P_1| = |P_1N_1| = \frac{a+a_0}{2}$, 所以 $|M_2N_2| \geq |M_1P_1|$, 因此 $P_1 \in M_2N_2$, 因而可得 $S \cap \{P_1, P_2, P_3\} \neq \phi$.

综上所述可知 $2 < \lambda < 3$ 时集族 $\mathcal{S}$ 具有 Π^3 性质.

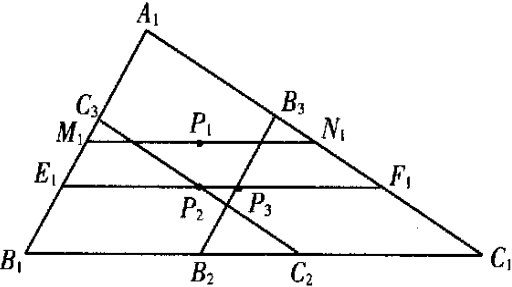


图 3 $2 < \lambda < 3$ 情形
Fig 3 Case of $2 < \lambda < 3$

情形 4 $\lambda = 3$

仿情形 2 在 $\triangle ABC$ 中作直线 B_2B_3, C_2C_3, M_1N_1 , 易见此 3 条线交于点 O (图 4). 由于 $\mathcal{S}$ 中任二元必相交, 故任取 $S \in \mathcal{S}$ 有, $l_{M_1N_1} \subseteq l_1^+(S)$, $l_{C_2C_3} \subseteq l_2^+(S)$, $l_{B_2B_3} \subseteq l_3^+(S)$, 因此有 $O \in S$. 即 $\mathcal{S}$ 具有 Π^1 性质, 因而具有 Π^3 性质.

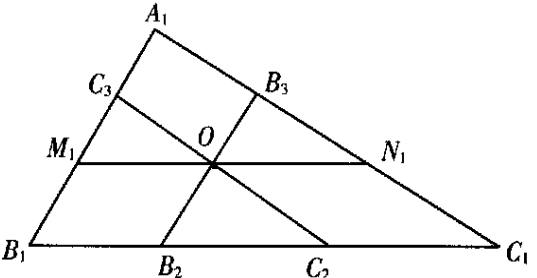


图 4 $\lambda = 3$ 情形
Fig 4 Case of $\lambda = 3$

情形 5 $\lambda > 3$

如图 5 所示, $\triangle A_1B_1C_1$ 中 $S_1 \cap B_1C_1 = B_2C_2$, 由于 $\lambda > 3$, 所以 $|B_1C_1| > 3a$, 因此 $|B_1B_2|, |C_1C_2|$ 至少有一大于 a , 不妨设 $|C_1C_2| > a$, 则有 $S_1 \cap S_2 = \phi$, 与 $\mathcal{S}$ 中任二元均相交矛盾, 因此 λ 不能大于 3.

综合以上论述即得定理结论.

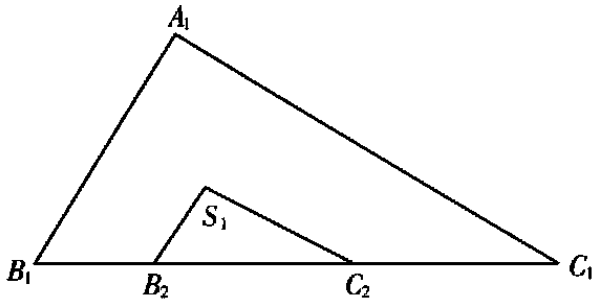


图 5 $\lambda > 3$ 情形
Fig. 5 Case of $\lambda > 3$

参考文献:

- [1] ECKHOFF J H. Radon and Carathéodory type theorems [C] //GRUBER P M, WILLS J M. Handbook of convex geometry[M]. Amsterdam: North Holland, 1993. 406—409.
- [2] KATCHALSKI M, NASHTIR D. A Helly type conjecture [J]. Discrete Comput Geom, 1999, 21: 37—43.

On a Conjecture of Grünbaum's

YUAN Li-ping

(Department of Mathematics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: It is shown that a planar family of translates of a closed triangle is Π^3 , provided that any two of its members intersect.

Keywords: Π^n ; closed convex set; translation; halfspace

(上接第 103 页)

Two Kinds of Ideals of Locale $P(X)$

XIAO Jian-ming

(Mathematics Department, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: From the perspective of lattice theory, two kinds of ideals of discrete topology as a locale, which are principal ideal and WB-ideal, and some of their properties are presented.

Keywords: locale; principal ideal; WB-ideal