

类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ ^{*}

周晓聪, 李文军, 李师贤
(中山大学计算机科学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 为研究高阶子类型的范畴论语义模型, 区分了带高阶子类型的类型系统中的各种上下文, 并简化其中的受限全称量词类型引入规则, 而提出了类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$. 文章介绍该类型系统有关类别 (Kind)、算子 (Operator)、项 (Term) 的规则, 及其与建立范畴论语义模型有关的结构性质.
关键词: 类型系统; 子类型; 受限全称量词类型
中图分类号: TP311 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 03-0013-05

20 世纪 80 年代中期以来, 有许多学者将多态 λ 演算系统, 如 System F, 进行各种各样的扩充以描述面向对象技术的核心概念, 其中最主要的工作集中在子类型, 包括将量词类型扩充为受限量词类型 (bounded quantification type) 等, 重要的成果有 Cardelli 等^[1~3] 的系统 $F_{<}$, 系统 $F_{<}; \omega$; Curien^[4] 和 Ghelli 等^[5] 的系统 $F_{\leq}$; Pierce 等^[6] 的系统 $F \wedge \omega$ 等.

为探讨面向对象语言的形式理论基础, 需要研究带高阶子类型的类型系统的语义模型. Cardelli 等^[3] 指出建立高阶子类型的通用范畴论语义模型是一个相当困难的问题. 为解决这个难题, 本文提出类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$, 它区分算子上下文、子类型关系上下文和类型上下文, 并改进受限全称量词类型的引入规则, 使得算子的引入不依赖于子类型关系, 在此基础上, 引入 $\lambda\omega \times_{\leq}$ fibration 作为类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 的通用的范畴论语义模型⁷.

本文介绍类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 及其结构性质. 结构性质是研究类型系统的范畴论语义模型所必需涉及的. 我们侧重讨论类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 与 Cardelli 等^[1] 的类型系统的不同之处, 对于其结构性质的探讨也主要针对 Cardelli 等^[1] 所讨论的各种性质.

1 类别和算子

类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 中类别 (kind) 的抽象语法为:

$$K, L ::= \text{Unit} \mid \text{Type} \mid K \Rightarrow L$$

而初始算子 (raw operator) 的抽象语法为:

$$\Phi, \Psi ::= X \mid \text{unit} \mid \text{Top} \mid \lambda X:K. \Phi \mid \Phi \Psi \mid \Phi \Rightarrow \Psi \mid \forall X \leq \Phi. K. \Psi$$

这里对文 [7] 中的形式做了简化, 省略其中关于积算子、积类型有关的内容, 这种简化不会影响本文对类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 及其性质的讨论.

算子 $\forall X \leq \Phi. K. \Psi$ 表明量词的引入结合了子类型关系, 所以通常称为受限量词类型. 为方便起见, 对任意类别 K , 算子常量 $\text{Top}(K)$ 归纳定义为:

- (1) $\text{Top}(\text{Unit}) = \text{unit}$, $\text{Top}(\text{Type}) = \text{Top}$
- (2) $\text{Top}(K \Rightarrow L) = \lambda X:K. \text{Top}(L)$

对于初始算子 Φ , 其自由算子变量集记为 $\text{fopv}(\Phi)$, 受限算子变量集记为 $\text{bopv}(\Phi)$, 用初始算子 Ψ 替换 Φ 中的自由算子变量 X 记为 $\Phi[\Psi/X]$.

类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 的算子上下文 (operator context) 是算子变量和类别对的有限表, 记为 $[X_1:K_1, \dots, X_n:K_n]$, 其中 X_i 各不相同, K_i 是类别, 通常用 Δ, Δ' 表示算子上下文. 记 $\text{dom}(\Delta) = \{X_1, \dots, X_n\}$, 表示上下文 Δ 中所有自由算子变量所组成的集合.

类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 的已证明算子 (proved operator) 是形式为 $\Delta \vdash \Phi:K$ 的判断, 其中 Δ 是算子上下文, Φ 是初始算子, 而 K 是类别. 已证明算子通过且仅通过下面的类别化规则产生.

* 基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (98055801)

收稿日期: 2000-06-14; 作者简介: 周晓聪 (1971-), 男, 讲师; 通讯联系人: 李师贤.

$K\text{-Var}$	$\overline{\Delta, X; K, \Delta' \vdash X; K}$
$K\text{-Fun } I$	$\frac{\Delta, X; K \vdash \Phi; L}{\Delta \vdash \lambda X; K. \Phi; K \Rightarrow L}$
$K \Rightarrow \text{Type}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi; \text{Type} \quad \Delta \vdash \Psi; \text{Type}}{\Delta \vdash \Phi \Rightarrow \Psi; \text{Type}}$
$K\text{-Top}$	$\overline{\Delta \vdash \text{Top}(K); K}$
$K\text{-Fun } E$	$\frac{\Delta \vdash \Phi; K \Rightarrow L \quad \Delta \vdash \Psi; K}{\Delta \vdash \Phi \Psi; L}$
$K\text{-}\forall\text{-Type}$	$\frac{\Delta, X; K \vdash \Psi; \text{Type} \quad \Delta \vdash \Psi; K}{\Delta \vdash \forall X \leq \Phi; K. \Psi; \text{Type}}$

Cardelli 等的类型系统没有区分算子上下文和子类型上下文, 其上下文的一般形式是

$$\Gamma = [X_1 \leq \Phi_1; K_1, \dots, X_n \leq \Phi_n; K_n, \\ x_1: \Psi_1, \dots, x_m: \Psi_m]$$

在引入受限量词类型时则使用下面形式:

$$\frac{\Delta, X \leq \Phi; K \vdash \Psi; \text{Type}}{\Delta \vdash \forall X \leq \Phi; K. \Psi}$$

这时由于算子 Φ_i 的自由算子变量也在集合 $\{X_1, \dots, X_n\}$ 中, 为在逻辑上合理, 需要约束 Φ_i 的自由算子变量在集合 $\{X_1, \dots, X_{i-1}\}$ 中. 这样上下文 Γ 中各个算子变量的声明就不再独立, 它们的顺序不能随意改变, 使得研究类型系统的性质很不方便, 而且在范畴论模型中也很难以表达这种顺序相关性, 从而难以建立其相应的语义模型.

在类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 中, 我们将上下文分为算子上下文、子类型上下文和项上下文, 每个上下文中变量的声明都独立, 顺序可随意改变, 使得整个类型系统在逻辑上更合理, 表达形式更清晰. 由于区分各种上下文, 引入算子就不可涉及子类型关系, 所以上述 $K\text{-}\forall\text{-Type}$ 规则不再依

赖子类型关系.

对于类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$, 我们研究的重点就是考虑在区分各种上下文, 以及采用改进的受限全称量词引入规则后, 会给类型系统的性质带来什么影响. 为此我们分析了文献 [1] 中类型系统 $F_{<}$ 的绝大部分性质, 给出它们在类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 中的相应形式, 并进行了证明^[7]. 发现这种改进不会使类型系统的结构性性质发生本质改变, 也不会使类型系统的表达能力减弱, 但可清楚地表述带高阶子类型的类型系统的性质, 并更好地给出某些性质的成立条件.

定理 1 已证明算子有如下结构性性质:

- (1) 若有 $\Delta \vdash \Phi; K$, 则 $\text{fopv}(\Phi) \subseteq \text{dom}(\Delta)$;
- (2) 若有 $\Delta \vdash \forall X \leq \Phi; K. \Psi; \text{Type}$, 则 $X \notin \text{fopv}(\Phi)$;
- (3) 类别化的排列规则: 若有 $\Delta \vdash \Phi; K$, 则 $\Pi\Delta \vdash \Phi; K$, 其中 $\Pi\Delta$ 表示算子上下文 Δ 的一个排列, 该性质表明已证明算子的产生与算子上下文中自由算子变量的顺序无关;
- (4) 类别化的弱化规则: 若有 $\Delta \vdash \Phi; K$, 且 $X \notin \text{dom}(\Delta)$, 则有 $\Delta, X; K \vdash \Phi; K$;
- (5) 类别化的替换规则: 若有 $\Delta, X; K, \Delta' \vdash \Phi; L$, 以及 $\Delta \vdash \Psi; K$, 则有 $\Delta, \Delta' \vdash \Phi[\Psi/X]; L$;
- (6) 若有 $\Delta \vdash \Phi; K$, 以及 $\Delta \vdash \Delta; L$, 则有 $K = L$. 该性质表明已证明算子的类别唯一.

类型系统 $\lambda\omega \times_{\leq}$ 的上下文下的算子等式 (operator equation in context) 是形式为 $\Delta \vdash \Phi = \Phi'; K$ 的判断. 上下文下的算子等式通过且仅通过下面的算子等式规则产生:

$K\text{-Eq Top}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi; \text{Unit}}{\Delta \vdash \Phi = \text{unit}; \text{Unit}}$	$K\text{-Eq Refl}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi; K}{\Delta \vdash \Phi = \Phi; K}$
$K\text{-Eq Sym}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi = \Phi'; K}{\Delta \vdash \Phi' = \Phi; K}$	$K\text{-Eq Tran}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi = \Phi'; K \quad \Delta \vdash \Phi' = \Phi''; K}{\Delta \vdash \Phi = \Phi''; K}$
$K\text{-Eq Weak}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi = \Phi'; L \quad X \notin \text{dom}(\Delta)}{\Delta, X; K \vdash \Phi = \Phi'; K}$	$K\text{-Eq Perm}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi = \Phi'; K}{\Pi\Delta \vdash \Phi = \Phi'; K}$
$K\text{-Eq Sub}$	$\frac{\Delta, X; K \vdash \Phi = \Phi'; L \quad \Delta \vdash \Psi = \Psi'; K}{\Delta \vdash \Phi[\Psi/X] = \Phi'[\Psi'/X]; L}$	$K\text{-Eq-}\eta$	$\frac{\Delta \vdash \Phi; K \Rightarrow L \quad X \notin \text{fopv}(\Phi)}{\Delta \vdash \lambda X; K. (\Phi X) = \Phi; K \Rightarrow L}$
$K\text{-Eq } \beta$	$\frac{\Delta, X; K \vdash \Phi; L \quad \Delta \vdash \Psi; K}{\Delta \vdash \lambda X; K. (\Phi) \Psi = \Phi[\Psi/X]; L}$	$K\text{-Eq Poly}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi; K \quad \Delta, X; K \vdash \Psi = \Psi'; \text{Type}}{\Delta \vdash \forall X \leq \Phi; K. \Psi = \forall X \leq \Phi; K. \Psi'; \text{Type}}$
$K\text{-Eq Fun}$	$\frac{\Delta, X; K \vdash \Phi = \Phi'; L}{\Delta \vdash \lambda X; K. \Phi = \lambda X; K. \Phi'; K \Rightarrow L}$		

根据算子等式规则容易证明若 $\Delta \vdash \Phi = \Phi'; K$, 则有 $\Delta \vdash \Phi; K$ 和 $\Delta \vdash \Phi'; K$.

2 子类型

类型系统引入子类型关系是在算子之间定义

关系 $\leq$. 类型 $\Phi \leq \Psi$ 的基本含义为凡是要求类型为 Ψ 的项的地方都可使用类型 Φ 的项来代替. 为研究受限量词, 这种子类型关系要扩充到所有算子, 而不仅仅是类别为 Type 的算子 (这时称其为类型). 子类型关系局限于类型称为二阶子

类型关系, 如果所有算子都可定义子类型关系, 则称为高阶子类型关系.

类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 的初始子类型关系是初始算子集上的一个二元关系, 记为 $\Phi \leq \Psi$, 其中 Φ 和 Ψ 都是初始算子. 子类型上下文是形式为 $\Omega = [X_1 \leq \Phi_1; K_1, \dots, X_n \leq \Phi_n; K_n]$ 的表, 其中 X_i 各不相同, 且对 $1 \leq i \leq n$ 有 $X_i \notin \text{fopv}(\Phi_i)$, 称 $X_i \leq \Phi_i; K_i$ 为 X_i 在 Ω 中的界声明. 记

$$\text{dom}(\Omega) = \{X_1, \dots, X_n\}, \text{cod}(\Omega) = \text{fopv}(\Phi_1) \cup \dots \cup \text{fopv}(\Phi_n).$$

$S\text{-Var}$	$\frac{\Delta, X; K \vdash \Omega \quad \Delta \vdash \Phi; K \quad X \notin \text{dom}(\Omega)}{\Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Phi; K \vdash X \leq \Phi; K}$	$S\text{-Refl}$	$\frac{\Delta \vdash \Omega \quad \Delta \vdash \Phi = \Phi'; K}{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Phi'; K}$
$S\text{-Fun } I$	$\frac{\Delta \vdash \Omega \quad \Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Phi'; L}{\Delta \mid \Omega \vdash \lambda X; K. \Phi \leq \lambda X; K. \Phi'; K \Rightarrow L}$	$S\text{-Fun } E$	$\frac{\Delta \mid \Omega \vdash \Psi \leq \Psi'; K \Rightarrow L \quad \Delta \vdash \Phi; K}{\Delta \mid \Omega \vdash \Psi \Phi \leq \Psi' \Phi; L}$
$S\text{-Top}$	$\frac{\Delta \vdash \Omega \quad \Delta \vdash \Phi; K}{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi \leq \text{Top}(K); K}$	$S\text{-Tran}$	$\frac{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Phi'; K \quad \Delta \mid \Omega \vdash \Phi' \leq \Phi''; K}{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Phi''; K}$
$S \Rightarrow \text{Type}$	$\frac{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi' \leq \Phi; \text{Type} \quad \Delta \mid \Omega \vdash \Psi \leq \Psi'; \text{Type}}{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi \Rightarrow \Psi \leq \Phi' \Rightarrow \Psi'; \text{Type}}$		
$S\text{-}\forall \text{ Type}$	$\frac{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi' \leq \Phi; K \quad \Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Phi'; K \vdash \Psi \leq \Psi'; \text{Type}}{\Delta \mid \Omega \vdash \forall X \leq \Phi; K. \Psi \leq \forall X \leq \Phi'; K. \Psi'; \text{Type}}$		

其中规则 $S\text{-Var}$ 表明当在 Ω 引入新的界声明 $X \leq \Phi; K$ 时, 算子变量可以已经出现在 $\text{cod}(\Omega)$ 中, 这是类型系统 $F_{<}^{[1]}$ 所不允许的. 下面的定理说明了类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 的子类型关系的性质.

定理 2 子类型上下文的弱化规则

- (1) 若有 $\Delta \vdash \Omega$, 且 $X \leq \text{dom}(\Delta)$, 则有 $\Delta, X; K \vdash \Omega$
- (2) 若有 $\Delta, X; K \vdash \Omega$, 及 $\Delta \vdash \Phi; K$, 且 $X \leq \text{dom}(\Omega)$, 则有 $\Delta, X; K \vdash \Omega, X \leq \Phi; K$.

Cardelli 等人的类型系统的上下文 (文献 [1] 中称为环境) 中各个变量的声明顺序不能随意改动, 而在类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 中有:

定理 3 子类型关系的排列规则:

$$\frac{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Psi; L}{\Pi \Delta \mid \Pi \Omega \vdash \Phi \leq \Psi; L}$$

其中, $\Pi \Delta$ 和 $\Pi \Omega$ 分别是算子上下文和子类型上下文的一个排列.

子类型关系的弱化规则有几种形式, 包括在算子上下文中增加变量、在子类型上下文中增加变量, 以及可弱化子类型上下文中某个变量的界声明. 有下面的定理:

定理 4 子类型关系的弱化规则:

- (1)
$$\frac{\Delta \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Psi; L \quad X \notin \text{dom}(\Delta)}{\Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Phi(\Psi; L)}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Phi'; L \\ \Delta \vdash \Theta; K \quad X \notin \text{dom}(\Omega) \end{array} \right.$$
- (2)
$$\frac{\Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Theta; K \vdash \Phi \leq \Phi'; L}{\Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Theta; K \vdash \Phi \leq \Phi'; L}$$

称子类型上下文 $\Omega = [X_1 \leq \Phi_1; K_1, \dots, X_n \leq \Phi_n; K_n]$ 为算子上下文 Δ 下的合式子类型上下文, 如果对 $1 \leq i \leq n$ 有: $\Delta \vdash X_i; K_i$ 及 $\Delta \vdash \Phi_i; K_i$, 记 $\Delta \vdash \Omega$ 表示子类型上下文 Ω 是算子上下文 Δ 下的合式子类型上下文.

类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 的已证明子类型关系是形式为 $\Delta \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Psi; K$ 的判断, 其中 Δ 是算子上下文, Ω 是子类型上下文, Φ 和 Ψ 都是初始算子, K 是类别. 已证明子类型关系通过且仅通过下面的子类型规则 (rule of subtyping) 产生:

$$(3) \frac{\left\{ \begin{array}{l} \Delta, X; K \mid \Omega, X(\Theta; K) \vdash \Phi \leq \Phi'; L \\ \Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Theta' \leq \Theta; K \\ \Delta \vdash \Theta; K \quad \Delta \vdash \Theta'; K \end{array} \right.}{\Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Theta; K \vdash \Phi \leq \Phi'; L}$$

为研究子类型关系的替换规则, 需先定义子类型上下文的替换. 在类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 中, 对于子类型上下文 $\Omega = [X_1 \leq \Phi_1; K_1, \dots, X_m \leq \Phi_m; K_m]$, 约定对 $1 \leq i \leq m$, 有 $X_i \notin \text{fopv}(\Phi_i)$. 将在子类型上下文 Ω 的算子中出现的自由算子变量 X 替换为算子 Φ 的操作记为 $\Omega[\Phi/X]$, 定义为 $\Omega[\Phi/X] = [X_1 \leq \Phi_1[\Phi/X]; K_1, \dots, X_m \leq \Phi_m[\Phi/X]; K_m]$. 若这个替换满足: $X \notin \text{dom}(\Omega)$, 且对 $1 \leq i \leq m$, 有 $X \notin \text{fopv}(\Phi_i)$ 或 $X_i \notin \text{fopv}(\Phi)$, 则称替换 $\Omega[\Phi/X]$ 为合式的子类型上下文替换, 记为 $\vdash \Omega[\Phi/X]$.

定理 5 如果有 $\Delta, X; K \vdash \Omega$, $\Delta \vdash \Theta; K$ 和 $\vdash \Omega[\Theta/X]$, 则有 $\Delta \vdash \Omega[\Theta/X]$.

对于子类型关系的替换有两种情形, 一是要替换的变量在子类型上下文中不存在界声明, 二是要替换的变量在子类型上下文中存在界声明. 在第二种情况下只能使用与该变量的界有子类型关系的算子来替换. 有下面的定理:

定理 6 子类型关系的替换规则:

- (1)
$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Phi'; L \\ \Delta \vdash \Theta; K \quad \vdash \Omega[\Theta/X] \end{array} \right.}{\Delta \mid \Omega[\Theta/X] \vdash \Phi[\Theta/X] \leq \Phi'[\Theta/X]; L}$$

$$(2) \frac{\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vdash \Theta; K \quad \Delta \vdash \Theta'; K \\ \Delta, X; K \mid \Omega, X(\Theta; K) \vdash \Phi(\Phi'; L) \\ \Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Theta' / \Theta; K \quad \vdash \Omega \vdash \Theta' / X; L \\ \Delta \mid \Omega \vdash \Theta' / X; L \vdash \Phi \mid \Theta' / X; L \end{array} \right.}{\Delta \mid \Omega \vdash \Theta' / X; L}$$

在子类型上下文 Ω 中, 有一种特殊的界声明是 $X \leq \text{Top}(K); K$, 由规则 S_{Top} 可看出, 算子 $\text{Top}(K)$ 可看成是类别 K 中“最大”的算子, 因此 X 的界是 $\text{Top}(K)$ 也相当于 X 没有界, 即界 $\text{Top}(K)$ 可从子类型上下文 Ω 中消除:

定理 7 消除界 $\text{Top}(K); \Delta$,

$$\frac{X; K \mid \Omega, X \leq \text{Top}(K); K \vdash \Phi \leq \Psi; L}{\Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Psi; L}$$

3 项

类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 的初始项 (raw term) 可用下面的抽象语法定义:

$$M, N; : = x \mid \text{top} \mid \lambda x; \Phi. M \mid MN \mid \Lambda X \leq \Phi; K. M \mid M\Phi$$

同样这里省略了与积类型有关的项. 对于初始项 M , 它的自由算子变量集记为 $\text{fopv}(M)$, 自由项变量集记为 $\text{ftmv}(M)$. 用初始算子 Ψ 替换 M 中的自

由算子变量 X 记为 $M[\Psi/X]$, 用初始项 N 替换 M 中的自由项变量 x 记为 $M[N/x]$.

类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 的初始项上下文是项变量和初始算子对的有限表, 记为 $[x_1; \Phi_1, \dots, x_k; \Phi_k]$, 这里的 x_i 互不相同, 通常用 Γ 表示初始项上下文. 记 $\text{dom}(\Gamma) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $\text{cod}(\Gamma) = \text{fopv}(\Phi_1) \cup \dots \cup \text{fopv}(\Phi_k)$. 说初始项上下文 $\Gamma = [x_1; \Phi_1, \dots, x_k; \Phi_k]$ 是算子上下文 Δ 下的合式项上下文, 如果它满足, 对 $1 \leq i \leq k$, 有 $\Delta \vdash \Phi_i; \text{Type}$. 记 $\Delta \vdash \Gamma$ 表示 Γ 是 Δ 下的合式项上下文. 对于合式项上下文, 显然有性质: ① 若有 $\Delta \vdash \Gamma$, $\Delta \vdash \Theta; \text{Type}$, 且 $x \notin \text{dom}(\Gamma)$ 则有 $\Delta \vdash \Gamma, x; \Theta$; ② 若有 $\Delta \vdash \Gamma$, 且 $X \notin \text{dom}(\Delta)$, 则有 $\Delta, X; K \vdash \Gamma$.

类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 的已证明项 (proved term) 是形式为 $\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi$ 的判断, 其中, Δ 是算子上下文, Ω 是子类型上下文, Γ 是项上下文, M 是初始项, 而 Φ 是初始算子. 已证明项通过且仅通过下面的类型化规则 (rule of typing) 产生:

$T\text{-Var}$	$\frac{\Delta \vdash \Omega \quad \Delta \vdash \Gamma \quad \Delta \vdash \Phi; \text{Type} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma, x; \Phi \vdash x; \Phi}$	$T \rightarrow I$	$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma, x; \Phi \vdash M; \Psi}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash \lambda x; \Phi. M; \Phi \Rightarrow \Psi}$
$T \rightarrow E$	$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi \Rightarrow \Psi \quad \Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash N; \Phi}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash MN; \Psi}$	$T\text{Sub}$	$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi \quad \Delta \mid \Omega \vdash \Phi \leq \Phi'; \text{Type}}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi'}$
$T \vee E$	$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \forall X \leq \Phi; K. \Psi \quad \Delta \mid \Omega \vdash \Phi' \leq \Phi; K}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M\Phi'; \Psi \mid \Phi' / X}$	$T\text{-Top}$	$\frac{\Delta \vdash \Omega \quad \Delta \vdash \Gamma \quad \Delta \mid \Omega}{\Gamma \vdash \text{top}; \text{Top}}$
$T \vee I$	$\frac{\Delta \vdash \Omega \quad \Delta \vdash \Gamma \quad \Delta \vdash \Phi; K \quad \Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Phi; K \mid \Gamma \vdash M; \Psi}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash \Lambda X \leq \Phi; K. M; \forall X \leq \Phi; K. \Psi}$		

对于已证明项 $\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi$, 显然有 $\Delta \vdash \Omega$, $\Delta \vdash \Gamma$ 和 $\Delta \vdash \Phi; \text{Type}$, 因此 Ω , Γ 和 Φ 出现的算子变量都包含在 Δ , 而 M 中出现的项变量则包含在 Γ 中. 同样已证明项有排列规则. 对于弱化规则, 已证明项比子类型关系有更多的形式, 包括算子变量弱化、算子变量界弱化、项变量弱化和项变量类型弱化等形式:

定理 8 已证明项的弱化规则:

(1) 算子变量弱化:

$$\frac{\Delta, X; K \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi \quad \Delta \vdash \Psi; K \quad X \notin \text{dom}(\Omega)}{\Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Psi; K \mid \Gamma \vdash M; \Phi}$$

$$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi \quad X \notin \text{dom}(\Delta)}{\Delta, X; K \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi}$$

(2) 算子变量界弱化:

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vdash \Psi'; K \quad \Delta \vdash \Psi; K \\ \Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Psi; K \mid \Gamma \vdash M; \Phi \\ \Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Psi' \leq \Psi; K \end{array} \right.}{\Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Psi'; K \mid \Gamma \vdash M; \Phi}$$

(3) 项变量弱化:

$$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi \quad \Delta \vdash \Theta; \text{Type} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma, x; \Theta \vdash M; \Phi}$$

(4) 项变量类型弱化:

$$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma, x; \Theta \vdash M; \Phi \quad \Delta \mid \Omega \vdash \Theta' \leq \Theta; \text{Type}}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma, x; \Theta' \vdash M; \Phi}$$

将项上下文 $\Gamma = [x_1; \Phi_1, \dots, x_m; \Phi_m]$ 中出现的算子变量 X 用初始算子 Ψ 替换的操作记为 $\Gamma[\Psi/X]$, 定义为 $\Gamma[\Psi/X] = [x_1; \Phi_1[\Psi/X], \dots, x_m; \Phi_m[\Psi/X]]$. 对于合式项上下文, 显然若有 $\Delta, X; K \vdash \Gamma$, 且 $\Delta \vdash \Psi; K$, 则有 $\Delta \vdash \Gamma[\Psi/X]$. 对于已证明项的替换有两种情况, 一种是替换其中的算子变量, 一种是替换其中的项变量, 有定理:

定理 9 已证明项的替换规则:

$$(1) \frac{\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vdash \Psi'; K \quad \Delta \vdash \Psi; K \quad \Delta, X; K \mid \Omega \vdash \Psi' \leq \Psi; K \\ \Delta, X; K \mid \Omega, X \leq \Psi; K \mid \Gamma \vdash M; \Phi \quad \vdash \Omega \vdash \Psi' / X \\ \Delta \mid \Omega \mid \Gamma[\Psi/X] \vdash M[\Psi/X]; \Phi \mid \Psi' / X \end{array} \right.}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma, x; \Theta \vdash M; \Phi \quad \Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash N; \Theta}$$

$$(2) \frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma, x; \Theta \vdash M; \Phi \quad \Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash N; \Theta}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M[N/x]; \Phi}$$

对于已证明项, 同样可消除界 $\text{Top}(K)$, 即若有 $\Delta, X:K \mid \Omega, X \leq \text{Top}(K):K \mid \Gamma \vdash M; \Phi$, 可得到 $\Delta, X:K \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi$.

类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 的上下文下的项等式是形

$T\text{-Eq-Fun } \beta$	$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma, x: \Psi \vdash M; \Phi \quad \Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash N; \Psi}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash (\lambda x: \Psi. M) N = M; \Phi}$	$T\text{-Eq-Fun } \eta$	$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi \Rightarrow \Psi \quad x \notin \text{ftmv}(M)}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash \lambda x: \Phi. (Mx) = M; \Phi \Psi}$
$T\text{-Eq-Poly}$	$\frac{\Delta \vdash \Phi; K \quad \Delta \vdash \Omega \quad \Delta \vdash \Gamma \quad \Delta, X:K \mid \Omega, X \leq \Phi; K \mid \Gamma \vdash M = M'; \Psi}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash \Delta X \leq \Phi; K. M = \Delta X \leq \Phi; K. M'; \forall X \leq \Phi; K. \Psi}$		
$T\text{-Eq-Poly } \beta$	$\frac{\Delta, X:K \mid \Omega, X \leq \Phi; K \mid \Gamma \vdash M; \Psi \quad \Delta \mid \Omega \vdash \Phi' \leq \Phi; K \quad \Delta \vdash \Gamma}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash \Delta X \leq \Phi; K. M \Phi' = M \Phi' / X \mid \Psi \Phi' / X}$		
$T\text{-Eq-Poly } \eta$	$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \forall X \leq \Phi; K. \Psi \quad X \notin \text{ftvv}(M)}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash \Delta X \leq \Phi; K. (MX) = M; \forall X \leq \Phi; K. \Psi}$		
$T\text{-Subsumption}$	$\frac{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M = M'; \Phi \quad \Delta \mid \Omega \vdash \Phi(\Phi'; \text{Type})}{\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M = M'; \Phi'}$		

根据项等式规则, 容易证明若 $\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M = M'; \Phi$, 则 $\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi$ 及 $\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M; \Phi$.

4 结束语

本文简单介绍类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 的规则, 并给出了其结构性质, 更详细的内容读者可参看文 [7], 该文献可从网站 <http://www.selab.zsu.edu.cn> 中下载. 类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 与系统 $F_{<}^{[1]}$ 相比, 在不降低表达能力的前提下使得整个类型系统逻辑上更严谨, 更容易研究其语义模型. 在文 [7] 中定义了 $\lambda\omega \times \leq$ fibration, 它可从范畴论的角度很好地刻划类型系统 $\lambda\omega \times \leq$ 及其结构性质, 从而可认为是具有高阶子类型的类型系统的通用范畴论模型.

参考文献:

[1] CARDELLI L, MARTINI S, MITCHELL J C, et al. An extension of system F with subtyping [J]. Information and Computation, 1994, 109(1): 4—56.

式为 $\Delta \mid \Omega \mid \Gamma \vdash M = M'; \Phi$ 的判断. 产生上下文下的项等式规则与算子等式规则类似, 下表只列出了其中重要的规则:

[2] CARDELLI L. Notes about F -Omega-Sub. Unpublished manuscript, October 1990. Available from <http://www.luca.demon.co.uk/Notes.html>

[3] CARDELLI L, LONGO G. A semantic basis for quest [J]. J Functional Programming, 1991, 1 (4): 417—458.

[4] CURIEN P L, GHELLI G. Subtyping+extensionality: confluence of $\beta\eta$ -reductions in $F_{\leq}$ [A]. In: ITO T, MEYER A R, eds. Theoretical aspects of computer software (Sendai, Japan) [M]. New York: Springer-Verlag, 1991. 731—749.

[5] CURIEN P L, GHELLI G. Coherence of subsumption: Minimum typing and type-checking in $F_{\leq}$ [J]. Mathematical Structures in Computer Science, 1992 (2): 55—91.

[6] PIERCE B C. Programming with intersection types and bounded polymorphism [D]. Carnegie Mellon University, 1991.

[7] 周晓聪. 类型系统及其范畴论模型研究 [D]. 广州: 中国科学院软件研究所、中山大学计算机科学系, 1999.

Type System $\lambda\omega \times \leq$

ZHOU Xiao cong, LI Wen jun, LI Shi xian

(Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: In order to build categorical semantic model of high order subtyping, which distinguishes the different context and improve the introduction rule of bounded quantification type. The authors propose a type system named $\lambda\omega \times \leq$, show the rule of kinding, subtyping and typing in type system $\lambda\omega \times \leq$, and discuss its structural properties, which are the foundations for building categorical semantic model of high order subtyping.

Keywords: type system; subtyping; bounded quantification type