

Sobolev-Lieb-Thirring 不等式的推广及其在非自治无穷维动力系统中的应用*

殷朝阳¹, 丁伟²

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275; 2. 中山大学物理系, 广东 广州 510275)

摘 要: 将在自治的无穷维动力系统吸引子的维数估计中发挥重要作用的 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式的适用范围由 Banach 空间中的单位球面推广到了整个单位球内, 使之在非自治无穷维动力系统的吸引子的维数估计中发挥着同样重要的技术作用.

关键词: Sobolev-Lieb-Thirring 不等式; 吸引子的维数估计; 非自治无穷维动力系统

中图分类号: O175.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 04-0024-04

近 20 年来, 自治的无穷维动力系统的长时间性态, 在理论上已得到了深入的研究, 在实际中也得到了广泛的应用. 尤其是自治的发展偏微分方程的吸引子的存在性, 吸引子的分形维数估计, 惯性流形及逼近惯性流形等理论^[1~4]都已经迅速地发展起来, 并成功地建立了许多有用的实际模型. 相比较而言, 非自治的无穷维动力系统的渐近性态的研究比较缓慢, 问题在于非自治系统中受到了与时间有关系的的外力的作用, 破坏了自治系统所产生的流或半流的半群性质, 这使得处理非自治动力系统不能沿用自治系统下的理论和方法. 因而在自治系统中的相关理论和方法要想在非自治系统中得以实现, 那些在自治系统的相关理论中发挥重要作用的关键定理都要做实质的推广, 这样才可以在非自治系统中应用. Sobolev-Lieb-Thirring 不等式就是在自治系统的吸引子维数估计中起着重要作用的不等式. 本文的主要内容是将该不等式的适用范围从 Banach 空间的球面推广到整个球内, 这样使该不等式在非自治系统的吸引子的维数估计中仍发挥重要的技术作用.

1 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是一个具有 ζ^∞ 光滑边界的有界开集, 令

$$\pi u = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, [\alpha] = [\beta] = m} (-1)^m D^\beta (a_{\alpha, \beta}(x) D^\alpha u) \quad (1)$$

其中, $u \in \zeta_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^k)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $[\alpha] = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $a_{\alpha, \beta}$ 是一个 C^{2m} 的对称矩阵函数, 即 $a_{\alpha, \beta} = a_{\beta, \alpha}$, 则 π 是一个自共轭的 $2m$ 次齐次的微分算子, 由算子 π 可以定义如下的对称的双线性型:

$$a(u, v) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, [\alpha] = [\beta] = m} \int_{\Omega} a_{\alpha, \beta} D^\alpha u D^\beta v dx \quad (2)$$

我们还假设 $a(u, v)$ 是半强制的, 即: $\exists \delta > 0$, 有

$$a(u, u) \geq \delta \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, [\alpha] = m} |D^\alpha u|^2 \quad (3)$$

其中, $|\cdot|$ 表示 $L^2(\Omega)^k$ 中的范数, 本文用 $(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)^k$ 的内积, $\|u\|$ 表示 $H^m(\Omega)^k$ 的范数, 即 $\|u\| = \left(\sum_{[\alpha] = m} |D^\alpha u|^2 + \frac{|u|^2}{|\Omega|^{\frac{2m}{n}}}, |\Omega| \right)^{\frac{1}{2}}$ 是 Ω 的测度. 若令 $\lambda = \frac{\delta}{|\Omega|^{\frac{2m}{n}}}$, 则对 $\forall u \in H^m(\Omega)^k$ 有

$$a(u, u) + \lambda |u|^2 \geq \delta \|u\|^2 \quad (4)$$

下面用 V 表示 $H^m(\Omega)^k$ 的一个闭子空间, $a(u, v)$ 在 V 上的限制也是半强制的, 用 H 表示 V 在 $L^2(\Omega)^k$ 中的闭包. 这样在 V 上的双线性型可定义一个线性自伴无界算子 $A: D(A) \subset H \rightarrow H$. 并且 $\exists \lambda$, 使 $A + \lambda$ 是一个自伴正定可逆的算子, 由 Rellich 定理知 $H'(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^2(\Omega)$ 中, 从而 $(A + \lambda)^{-1}$ 是在 H 中紧算子. 这样我们可定义幂 $A^s, s \in \mathbb{R}$, 一般取 $V = D(A^{\frac{1}{2}})$, 因 $(A + \lambda)^{-1}$ 是自伴的

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19871094); 广东省自然科学基金资助项目 (990229); 香港中山大学高等学术中心基金会资助项目 (01M5)

收稿日期: 2000-10-13; 作者简介: 殷朝阳 (1968-), 男, 副教授.

紧算子,所以在 H 中就存在一簇正交向量 ω_j , 和序列 $\lambda_j, j \in \mathbf{N}, -\lambda < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \lambda_j \rightarrow \infty$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, 且有 $A\omega_j = \lambda_j\omega_j$. 关于 λ_j 和 ω_j , 本文假设 $\lambda_j \geq C_1 \left(\frac{j}{|\Omega|} \right)^{\frac{2m}{n}} - \lambda, \forall j \in \mathbf{N}$, 而且还假设, 对每个 $\gamma > \lambda$ 算子 $(A + \lambda)^{-1} \in \zeta(V, V)$ 可以被延拓成为从 $L^s(\Omega)^k$ 到 $V \cap \omega^{2m, s}(\Omega)^k, \forall s, 1 < s < \infty$ 的一个线性连续算子. 进而它还可看作 $L^2(\Omega)^k$ 上的正定算子. 从而我们可以得到下面的引理:

引理 在以上的假设都成立时, 对 $k \geq 1$ 和 $\gamma > 0$ 满足: $\frac{n}{2m} < k < \gamma + \frac{n}{2m}$, 则存在常数 k'_3 , 成立有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |u_j(f)|^{\gamma} \leq k'_3 \int_{\Omega} (f_-(x))^{\gamma + \frac{n}{2m}} dx \quad (5)$$

其中, $f \in L^p(\Omega)$, 当 $\frac{n}{2m} \geq 1$ 时, $p > \frac{n}{2m_0} > \frac{n}{2m}$; 当 $\frac{n}{2m} < 1$ 时, $p > 1$.

引理的证明参见文[1]. 下面给出本文的主要定理, 也是 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式的推广形式:

定理 在 V 和 H 以及 $a(u, v)$ 满足以上的假设下, 设 $\varphi_j, 1 \leq j \leq N$ 是 H 的单位球内相互垂直的向量, 对 $\forall x \in \Omega$, 令 $\rho(x) = \sum_{j=1}^N |\varphi_j(x)|^2$, 那么对每个满足 $\max\left(1, \frac{n}{2m}\right) < p \leq 1 + \frac{n}{2m}$ 的 p , 都存在常数 k , 成立有:

$$\left(\int_{\Omega} \rho(x)^{\frac{p(p-1)}{n}} dx \right)^{\frac{2m(p-1)}{n}} \leq k \left\{ \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \int_{\Omega} \rho(x) dx \right\}$$

其中, k 是依赖于 m, n, p, Ω 和 $a(u, v)$ 的常数, 但它独立于 N 和 $\varphi_j, 1 \leq j \leq N$.

2 定理1的证明

证明 首先, 令 $f = -\alpha \cdot \min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \cdot \rho^{\beta}$, $\alpha > 0$ 待定, $\beta = \frac{1}{p-1}$, 因为当 $n \leq 2m$ 时, $H^m(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$; 当 $n = 2m$ 时, $H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega), 1 < q < \infty$; 当 $n > 2m$ 时, $H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega), q = \frac{2n}{(n-2m)}$, 那么当 p 满足定理条件时, 我们有 $f \in L^p(\Omega)$ 且 $p > \frac{n}{2m}$, 同时 $B = A + \lambda + f$ 是 $D(A) \rightarrow H$ 的一个连续线性无界算子, 因 H 是内积空

间, 则 $\wedge^N H$ 是外积空间, 其自然的数量积为:

$$(u_1 \wedge \cdots \wedge u_N; v_1 \wedge \cdots \wedge v_N) = \det \{ (u_i, v_j) \}_{1 \leq i, j \leq N}, u_i, v_j \in H$$

由 H 上的算子 B 可定义 $\wedge^N H$ 上的连续线性无界算子 $B_N: \wedge^N D(B) \rightarrow \wedge^N H$,

$$\begin{aligned} B_N(u_1 \wedge \cdots \wedge u_N) &= \\ (Bu_1 \wedge \cdots \wedge u_N + \cdots + u_1 \wedge \cdots \wedge Bu_N), \\ \forall u_1, \cdots, u_N \in D(B) \end{aligned} \quad (7)$$

同样, 可以定义双线性型 b_N :

$$\begin{aligned} b_N(u_1 \wedge \cdots \wedge u_N; v_1 \wedge \cdots \wedge v_N) &= \\ (B_N(u_1 \wedge \cdots \wedge u_N), v_1 \wedge \cdots \wedge v_N) \end{aligned} \quad (8)$$

那么 $\exists \gamma$, 可使 $(B_N + \gamma I_N)^{-1}$ 是一个自共轭的紧算子, 那么 $B_N(\phi, \phi)$ 在 V 的单位球面 $\{\phi \in \wedge^N V, \|\phi\|_{\wedge^N H} = 1\}$ 上有最小值 e , 且 e 就是 B_N 的最小本征值. 若用 $\mu_j(f)$ 表示 $B = A + \lambda + f$ 的本征值, 则 B_N 的本征值是形如 $\mu_{i_1}(f) + \mu_{i_2}(f) + \cdots + \mu_{i_N}(f)$ 的数, 从而可令 $e = \mu_1(f) + \mu_2(f) + \cdots + \mu_N(f)$, 这样很容易得到一个事实: $\sum_{\mu_j(f) < 0} \mu_j(f) \leq e$. 现在考察定理中的 φ_i , 不妨设 $\varphi_j \neq 0, j = 1, 2, \cdots, N$, 若令 $\varphi = \frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_N}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2| \cdots |\varphi_N|}$, 则 $\|\varphi\|_{\wedge^N H} = 1$, 从而有

$$\begin{aligned} b_N \left(\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_N}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2| \cdots |\varphi_N|}, \right. \\ \left. \frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_N}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2| \cdots |\varphi_N|} \right) &\geq \\ e &\geq \sum_{\mu_j(f) < 0} \mu_j(f) \end{aligned} \quad (9)$$

再由 b_N 的表达式和取 $f = -\frac{\alpha \rho^{\beta}}{\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2}$, 可得

$$\begin{aligned} b_N \left(\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_N}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2| \cdots |\varphi_N|}, \right. \\ \left. \frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_N}{|\varphi_1| \cdot |\varphi_2| \cdots |\varphi_N|} \right) &= \\ \sum_{j=1}^N \frac{a(\varphi_j, \varphi_j)}{|\varphi_j|^2} + \lambda \sum_{j=1}^N \frac{|\varphi_j|^2}{|\varphi_j|^{2^2}} - \\ \sum_{j=1}^N \frac{\alpha}{\min_{1 \leq i \leq N} |\varphi_i|^2} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N |\varphi_i|^2 \right) \frac{\varphi_j^2(x)}{|\varphi_j|^{2^2}} dx &\leq \\ \frac{1}{\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2} \left(\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \lambda \sum_{j=1}^N |\varphi_j|_{L^2}^2 \right) - \\ \frac{1}{\max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2} \left(\frac{\alpha}{\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2} \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right) \end{aligned}$$

取 $\rho = \gamma - \frac{n}{2m}$ 和 $f(x) = -\frac{a\rho(x)^\beta}{\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2}$

利用引理可得

$$\sum_{\mu_j(f) < 0} \mu_j(f) = - \sum_{\mu_j(f) < 0} |\mu_j(f)| \geq - (k'_3)^{\frac{1}{\gamma}} \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha}{\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2} \rho(x)^\beta \right)^{\frac{1}{\gamma}} dx \geq - (k'_3)^{\frac{1}{\gamma}} \alpha^{\frac{p}{\gamma}} \left(\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \right)^{-\frac{p}{\gamma}} \left(\int_{\Omega} (\rho(x)^{\frac{p}{p-1}} dx) \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

从而可得

$$- \left(k'_3 \alpha^p \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \right)^{-\frac{p}{\gamma}} \leq \frac{1}{\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2} \left(\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \lambda \sum_{j=1}^N |\varphi_j|^2 \right) - \alpha \frac{1}{\max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2} \cdot \frac{1}{\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2} \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx$$

这样有

$$- \left(k'_3 \alpha^p \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \right)^{\frac{n}{2mr}} \cdot \max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \leq \max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \left(\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \lambda \sum_{j=1}^N |\varphi_j|^2 \right) - \alpha \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx$$

由于 $0 < \min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \leq \max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \leq 1$, 故得

$$0 < \left(\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \right)^{\frac{n}{2mr}} \cdot \max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \leq 1,$$

这样可得

$$- \left(k'_3 \alpha^p \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \lambda \sum_{j=1}^N |\varphi_j|^2 - \alpha \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx$$

若选取 α 使下式成立:

$$\alpha \left(\int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right) = 2 \left(- k'_3 \alpha^p \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (10)$$

即 $\alpha^{\gamma} \left(\int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\gamma} = 2^{\gamma} k'_3 \alpha^p \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx$

$$\alpha = 2^{\frac{\gamma}{\gamma-p}} (k'_3)^{\frac{1}{\gamma-p}} \left(\int_{\Omega} \rho(x)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma-p}} = 2^{\gamma} k'_3 \alpha^p \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx$$

因此有

$$\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \lambda \int_{\Omega} \rho dx \geq \frac{1}{2} \alpha \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \geq$$

$$2^{\frac{p}{\gamma-p}} (k'_3)^{\frac{1}{\gamma-p}} \left(\int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{\gamma-p}}$$

若取 $k = 2^{\frac{p}{\gamma-p}} (k'_3)^{\frac{1}{\gamma-p}} = 2^{-\frac{2m}{2m}} (k'_3)^{\frac{2m}{n}}$, 即得

$$\left(\int_{\Omega} \rho(x)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{2m(p-1)}{n}} \leq k \left\{ \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \int_{\Omega} \rho(x) dx \right\},$$

证毕.

推论 在满足定理的条件下, 如果

$\min_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 = \max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \leq 1$, 则有:

$$\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \lambda \int_{\Omega} \rho dx \geq C \left(\int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{2m(p-1)}{n}}$$

其中, c 依赖于 m, n, p, Ω 和 $a(u, v)$, 但独立于 φ_j 和 N . 证明只须注意到:

$$\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \lambda \int_{\Omega} \rho dx - \alpha \int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \geq \max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j|^2 \sum_{\mu_j(f) < 0} \mu_j(f) \geq \sum_{\mu_j(f) < 0} \mu_j(f)$$

和定理的证明类似, 可得

$$\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_j) + \lambda \int_{\Omega} \rho dx \geq C \left(\int_{\Omega} \rho^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{2m(p-1)}{n}}$$

注 推论表明定理的结果在半径 γ 小于或等于 1 的任何球面上都是成立的.

3 具体应用

例 1 若取 $\pi = \sim \Delta$, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界开域, 取 $V = H_0^1(\Omega)$, ($k = 1, m = 1$), 再令 $a(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v dx$, 则应用定理得:

$$\left(\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N |\varphi_j(x)|^2 \right)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{2(p-1)}{n}} \leq C \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \varphi_j|^2 dx$$

其中, $\varphi_j \in H_0^1(\Omega)$, 且 φ_j 在 $L^2(\Omega)$ 中正交, $1 \leq j \leq N$, 并且 $\max_{1 \leq j \leq N} |\varphi_j| \leq 1$, 而且 $\frac{n}{2} < p \leq 1 + \frac{n}{2}$, 这样有:

$$\left(\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N |\varphi_j(x)|^2 \right)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{1+\frac{2}{n}} \leq C \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \varphi_j|^2 dx$$

上述不等式对反应扩散方程的吸引子的 Hausdorff 维数及分形维数的上界估计起着重要的技术作用^[1].

例2 具有拟周期外力的2维 Navier-Stokes 方程:

$$\partial_t u = -\nu L u - B(u; u) + G(x, \omega), \partial_t \omega = \alpha$$

$$u|_{t=0} = u_0, \omega|_{t=0} = \omega_0, u_0 \in H, \omega_0 \in T^k$$

若令 $y = (u, \omega)$, $M(y) = (-\nu Lu - b(u, u) + G(x, \omega), \alpha)$, 则有

$$\partial_t y = -\nu L_y - B(u(t), v) -$$

$$B(v, u(t)) + G'_\omega(x, \omega(t))\mu$$

$$\partial_t \mu = 0, \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \in \mathbf{R}^k, \mu = \mu(x, t)$$

若令 $z = (v, \mu)$, 可得

$$\partial_t z = M'(y(t))z, z|_{t=0} = Z_0, z = (v, \mu)$$

这里 $L = \pi \Delta$, π 是一个投影算子.

取 $a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} D_i u \cdot D_i v \, dx$, $V = \{v \in H_0^1(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$, $H = V$ 在 $(L^2(\Omega))^2$ 上的闭包. 如果给定一族 $\{Z_j\}$ 是 V 中的元素, 且是 H 中的单位正交向量族 $Z_j = (v_j, \mu_j)$, 即:

$\|Z_j\| = 1, (Z_i, Z_j) = 0, i \neq j, 1 \leq i, j \leq N$, 这样 $\{v_j\}_{j=1}^N$ 和 $\{\mu_j\}_{j=1}^N$ 是两组 H 上的正交向量族, 并且 $\|v_j\| \leq \|Z_j\| \leq 1, \|\mu_j\| \leq \|Z_j\| \leq 1$, 应用定理可得:

$$\left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^N |v_j(x)|^2 dx \right)^{1+\frac{2}{n}} \leq k \sum_{j=1}^N a(v_j(x), v_j(x))$$

因为 $n = 2$, 故得

$$\left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^N |v_j(x)|^2 dx \right)^2 \leq k \sum_{j=1}^N a(v_j, v_j)$$

其中, k 是独立于 $\{v_j\}$ 和 N 的.

上述不等式对具有拟周期外力的2维 Navier-Stokes 方程一致吸引子的 Hausdorff 维数的上界估计起着同样关键的技术作用^[5,6].

参考文献:

- [1] TEMAM. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics [M]. New York: Springer-Verlag, 1988. 457-473.
- [2] BABIN A V, Vishik M I. Attractor for the Navier Stokes system and for parabolic equations and estimates of their dimension[J]. J Soviet Math, 1983, 28: 619-627.
- [3] FOIAS C, SELL G R, TEMAN R. Inertial manifold for nonlinear evolutionary equations[J]. J Differential Equations, 1988, 73: 309-353.
- [4] TITI E S. On approximate inertial manifolds to the Navier-Stokes equations[J]. J Math Anal Appl, 1990, 149: 540-557.
- [5] VCHEPYZHOV V, VISHIK M I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension[J]. J Math Pures Appl 1994, 73: 279-333.
- [6] 殷朝阳. 非自治无穷维动力系统的逼近惯性流形和非线性 Galerkin 方法[D]. 广州: 中山大学, 1998. 50-57.

Generalization of the Sobolev-Lieb-Thirring Inequality and Its Application in Nonautonomous Infinite Dynamical System

YIN Zhao-yang¹, DING Wei²

(1. Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China

2. Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The Sobolev-Lieb-Thirring Inequality, which is very important to the dimension estimate of the attractor of an autonomous infinite dimensional system, is generalized from the unit spherical surface to the unit ball of a Banach space, which also plays a key role in the dimension estimate of the attractor of a nonautonomous infinite dimensional system.

Keywords: Sobolev-Lieb-Thirring inequality; dimension estimate of the attractor; nonautonomous infinite dynamical system