

一类非线性算子的不动点定理及其应用^{*}

林壮鹏¹, 徐远通², 郭志明²

(1. 深圳大学数学系, 广东 深圳 518060; 2. 中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘要: 利用方向导数及 Banach 空间常微分方程理论研究一类非线性算子的不动点的存在唯一性, 推广了著名的 Banach 压缩映象原理. 同时还给出它们在一些重要的非线性问题上的应用.

关键词: 方向导数; Banach 空间常微分方程; 不动点

中图分类号: O177.91 **文献标识码:** A

1 问题的提出及结果

设 E 是实 Banach 空间, f 是 E 到 E 的非线性算子. $p \in E$, 人们常常要研究算子方程

$$f(x) = p \quad (1)$$

在 E 中是否有解? 若有解, 解是否唯一? 研究这个问题的一种方法是令 $Ax = f(x) + x - p$, 然后对算子 A 应用压缩映象原理, 即可得到方程(1)解的存在唯一性结果. 但压缩映象的条件太强, 多数场合给出的非线性算子 A 不一定是压缩映象, 因此必须寻求别的研究途径. 本文利用所获得的不动点定理, 可以证明方程(1)在 E 中有唯一解的结果, 同时还可得到非线性算子的一个满射性结果.

设 E 是实 Banach 空间, 引进方向导数 $[x, y]_{\pm}$ 如下:

$$\forall x, y \in E, [x, y]_{\pm} = \lim_{h \rightarrow \pm 0} \frac{1}{h} [\|x + hy\| - \|x\|]$$

关于方向导数的一些重要性质, 见文[1].

本文利用方向导数建立如下的不动点定理.

定理 1 设 $A \in C[E, E]$, 满足 $\forall x, y \in E$, 有

$$[x - y, Ax - Ay] \leq g(\|x - y\|) + \|x - y\| \quad (2)$$

其中, $g \in C[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}]$ ($\mathbf{R}_+ \triangleq [0, +\infty)$, 下同), $g(0) = 0$, 且 $\forall u_0 \in \mathbf{R}_+$, 初值问题

$$u' = g(u), u(0) = u_0$$

的最大解 $u(t, u_0)$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上有定义并满足: 当 $u_0 = 0$ 时, $u(t, u_0) \equiv 0$; 当 $u_0 > 0$ 时, 存在与 u_0 无关的常数 $\omega > 0$ 及 $\alpha \in [0, 1)$ 使 $u(\omega, u_0) \leq \alpha u_0$.

则 A 在 E 中有唯一的不动点.

推论 1 设 $A \in C[E, E]$ 且存在常数 $L < 1$ 使 $\forall x, y \in E$ 有

$$[x - y, Ax - Ay] \leq L \|x - y\| \quad (3)$$

则 A 在 E 中有唯一的不动点.

^{*} 收稿日期: 1999-11-25; 作者简介: 林壮鹏 (1960~), 男, 副教授.

说明 1 易见, 定理 1 及其推论 1 是 Banach 压缩映象原理的推广.

若要将推论 1 中的条件(3) 减弱为 $[x - y, Ax - Ay] \leq \|x - y\|, \forall x, y \in E$ 则需附加一些条件, 为此, 先引进如下定义:

定义 设 $A: E \rightarrow E$, 如果 $\{x_n\} \subset E$ 有界且 $Ax_n - x_n \rightarrow \theta (n \rightarrow \infty)$ 蕴含 $\{x_n\}$ 有收敛子列, 则称算子 A 在 E 上是半紧的.

定理 2 设 $A \in C[E, E]$ 满足

(1) A 在 E 上是半紧的;

(2) $\forall x, y \in E$ 有

$$[x - y, Ax - Ay] \leq \|x - y\|, ([x - y, Ax - Ay] < \|x - y\|, x \neq y);$$

(3) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x - Ax\| = +\infty$ 或存在常数 K 及函数 $C(r): [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \lim_{r \rightarrow \infty} C(r) > 1$,

使 $[x, Ax] \geq C(\|x\|) \cdot \|x\| + K, \forall x \in E$.

则 A 在 E 中必有(唯一的)不动点.

推论 2 设 A 是 E 上的半紧的(严格)非扩展映象且满足定理 2 中的条件(3), 则 A 在 E 中必有(唯一的)不动点.

说明 2 ① 定理 2 及其推论 2 并没有假定 E 是一致凸的 Banach 空间; ② 推论 2 不能用文[2] p59 定理 4.1 来证明, 因为 Banach 空间 E 是无界的.

现在再回到开头的问题, 利用上述定理可以证明

定理 3 设 $f: E \rightarrow E$ 连续且满足: 存在常数 $\alpha < 0$ 使 $\forall x, y \in E$ 有

$$[x - y, f(x) - f(y)] \leq \alpha \|x - y\|,$$

则 f 是 E 上的一一满射, 从而算子方程(1) 在 E 中有唯一解. 若 f 还是线性的, 则 f 是 E 上的线性同胚.

证明 $\forall p \in E$, 必须证明方程(1) 在 E 中有唯一解 x . 为此, 令

$$Ax = f(x) + x - p, \quad \forall x \in E$$

只需证明算子 A 在 E 中有唯一的不动点. 显然, $A: E \rightarrow E$ 连续且 $\forall x, y \in E$, 有

$$[x - y, Ax - Ay] = [x - y, f(x) - f(y) + x - y] =$$

$$[x - y, f(x) - f(y)] + \|x - y\| \leq (1 + \alpha) \|x - y\| = L \|x - y\|$$

其中, $L = 1 + \alpha < 1$, 所以根据推论 1, 算子 A 在 E 中有唯一的不动点.

当 f 还是线性算子时, 根据 Banach 逆算子定理(见文[3] p129 定理 3.6), 可知 f 是有界可逆的, 从而是 E 上的线性同胚.

例子 在 Banach 空间 $E = c_0 = \{x = \{x_n\} \mid x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\}$ (范数为 $\|x\| = \sup_{n \geq 1} |x_n|, \forall x = \{x_n\} \in c_0$) 上定义算子 $f: E \rightarrow E$ 如下

$$f(x) = \left\{ -4x_n + \frac{1}{2}x_{2n+1} + \frac{1}{n} \right\}, \quad \forall x = \{x_n\} \in E$$

则易知 $\|f(x) - f(y)\| \leq (9/2) \|x - y\|, \forall x, y \in E$

所以 $f \in C[E, E]$, 又 $\forall x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in E$ 有

$$[x - y, f(x) - f(y)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ \|x - y + h[f(x) - f(y)]\| - \|x - y\| \} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\sup \left| (x_n - y_n) - 4h(x_n - y_n) + \frac{h}{2}(x_{2n+1} - y_{2n+1}) \right| - \|x - y\| \right] \leq$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[(1 - 4h) \sup_{n \geq 1} |x_n - y_n| + \frac{|h|}{2} \sup_{n \geq 1} |x_{2n+1} - y_{2n+1}| - \|x - y\| \right] \leq$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[(1-4h) \|x-y\| - \frac{|h|}{2} \|x-y\| - \|x-y\| \right] = -\frac{7}{2} \|x-y\| = \alpha \|x-y\|$$

其中, $\alpha = -7/2 < 0$, 所以根据定理 3 可知, f 是 E 上的一一满射, 因此 $\forall p \in E$, 方程(1)在 E 中都有唯一解. 容易知道算子 $Ax = f(x) + x - p$ 不是 c_0 上的压缩映象.

显然, f 满足推论 1 的全部条件, 但若取 $x_0 = (1, 0, 0, 0, 0, \dots)$, $y_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) \in c_0$, 直接计算可得

$$\|f(x_0) - f(y_0)\| > 3/2 > \|x_0 - y_0\| = 1$$

可见 f 不是 c_0 上的压缩映象. 因此, 推论 1 比 Banach 压缩映象原理的条件弱.

2 主要结果的证明

定理 1 的证明 令 $f(x) = Ax - x$, 则 $f \in C[E, E]$ 且条件(2)等价于 $\forall x, y \in E$ 有

$$[x-y, f(x)-f(y)] \leq g(\|x-y\|) \quad (4)$$

根据 Banach 空间常微分方程理论(见文[1] 定理 4.2.3), $\forall x_0 \in E$, 初值问题

$$\frac{dx}{dt} f(x) = Ax - x, x(0) = x_0 \quad (5)$$

存在唯一的定义于 $\mathbf{R}_+$ 上的解 $x(t, x_0)$.

$$\forall x_0, y_0 \in E, \text{ 令 } m(t) = \|x(t, x_0) - x(t, y_0)\|,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } m'(t) &= [x(t, x_0) - x(t, y_0), x'(t, x_0) - x'(t, y_0)] = \\ &= [x(t, x_0) - x(t, y_0), f(x(t, x_0)) - f(x(t, y_0))] \leq \\ &= g(\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\|) = g(m(t)) \end{aligned}$$

所以根据比较定理(文[1] 定理 1.2.6)得

$$\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| = m(t) \leq u(t, \|x_0 - y_0\|)$$

其中, $u(t, \|x_0 - y_0\|)$ 是初值问题 $u' = g(u)$, $u(0) = \|x_0 - y_0\|$ 的最大解, 由假设有

$$\|x(\omega, x_0) - x(\omega, y_0)\| \leq u(\omega, \|x_0 - y_0\|) \leq \alpha \|x_0 - y_0\|, (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (6)$$

定义算子 $T: E \rightarrow E$ 为: $\forall x_0 \in E, Tx_0 = x(\omega, x_0)$,

由初值问题(5)解的存在唯一性知 T 在 E 上有确定意义, 且由不等式(6)知 T 是 E 上的压缩映象, 根据 Banach 压缩映象原理, T 在 E 上有唯一的不动点 $\tilde{x}_0$, 即

$$x(\omega, \tilde{x}_0) = T\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$$

由于 $f(x) = Ax - x$ 不含 t , 当然它关于 t 有周期 ω , 由此及解的唯一性易知, $x(t, \tilde{x}_0)$ 是初值问题(5)的唯一的周期为 ω 的周期解, 即

$$x(\omega + t, \tilde{x}_0) = x(t, \tilde{x}_0), \forall t \in \mathbf{R}_+.$$

再由解的唯一性及 f 不含 t 易知, 对每一固定的 $t \in \mathbf{R}_+$ 有

$$x(\omega, x(t, \tilde{x}_0)) = x(\omega + t, \tilde{x}_0) = x(t, \tilde{x}_0)$$

从而由不等式(6)可知对每一固定的 $t \in \mathbf{R}_+$ 都有

$$\|x(t, \tilde{x}_0) - \tilde{x}_0\| = \|x(\omega, x(t, \tilde{x}_0)) - x(\omega, \tilde{x}_0)\| \leq \alpha \|x(t, \tilde{x}_0) - \tilde{x}_0\|$$

故由 $0 \leq \alpha < 1$, 得 $x(t, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0, t \in \mathbf{R}_+$, 而它是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = Ax - x, x(0) = \tilde{x}_0$$

的解, 从而必有 $A\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$, 即 $\tilde{x}_0$ 是 A 的不动点.

下证 A 的不动点的唯一性. 设 A 在 E 中又有不动点 $\tilde{y}_0$, 即 $A\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0$, 则 $x(t, \tilde{y}_0) \equiv \tilde{y}_0, t \in \mathbf{R}_+$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = Ax - x, x(0) = \tilde{y}_0$$

的唯一解, 由不等式 (6) 得

$$\|\tilde{x}_0 - \tilde{y}_0\| = \|x(\omega, \tilde{x}_0) - x(\omega, \tilde{y}_0)\| \leq \alpha \|\tilde{x}_0 - \tilde{y}_0\|$$

故 $\tilde{y}_0 = \tilde{x}_0$, 即 A 在 E 中的不动点还是唯一的. 证毕.

推论 1 的证明 由条件有

$$[x - y, Ax - Ay] \leq (L - 1)\|x - y\| + \|x - y\| = g(\|x - y\|) + \|x - y\|$$

其中, $g(u) = -(1 - L)u, g(0) = 0$, 且常微分方程初值问题

$$u' = g(u) = -(1 - L)u, u(0) = u_0 \in \mathbf{R}_+$$

的唯一解为

$$u(t, u_0) = u_0 e^{-(1-L)t}, t \in \mathbf{R}_+.$$

满足当 $u_0 = 0$ 时 $u(t, u_0) \equiv 0$; 当 $u_0 > 0$ 时, 存在 $\omega = 1 > 0, \alpha = e^{-(1-L)/2} \in [0, 1)$ 使 $u(\omega, u_0) \leq \alpha u_0$.

根据定理 1, 可知 A 在 E 中有唯一的不动点. 证毕.

定理 2 容易用推论 1 证明, 推论 2 可由定理 2 推出, 这里从略.

参考文献:

- [1] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989.
- [2] 赵义纯. 非线性泛函分析及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989. 49~86.
- [3] 江泽坚, 孙善利. 泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994. 92~132.

Fixed Point Theorems of a Class of Nonlinear Operators and Their Applications

LIN Zhuang-peng^{*}, XU Yuan-tong, GUO Zhi-ming

Abstract: Several theorems of the existence and uniqueness of fixed points for a class of nonlinear operators are obtained by using directional derivative and the theory of ordinary differential equations in Banach spaces. Some of the theorems generalize the famous Banach contraction mapping principle. Also, applications of these theorems to some important nonlinear problems are given.

Keywords: directional derivative; ordinary differential equations in Banach spaces; fixed point

^{*} Department of Mathematics, Shenzhen University, Guangdong Shenzhen 518060, China.